Matematica C3 – Algebra 2

Manuale di algebra per il biennio della scuola secondaria di secondo grado
Seconda Edizione

Coordinatori del progetto

Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini

Autori

Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano

Hanno collaborato

Gemma Fiorito, Daniela Hérin, Alessandro Albertini, Luciano Sarra, Pierluigi Cunti, Grazia Petrone, Raffaele Santoro, Lisa Maccari, Alessandra Marrata, Gavino Napoletano, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Livia Noris, Eugenio Medaglia, Francesca Lorenzoni, Roberto Capancioni, Nicola De Rosa, Riccardo Sala, Lucia Rapella

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 17.07.2012

Stampa

Seconda edizione, luglio 2012

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola:

Titolo: Matematica C3, Algebra 2 seconda edizione
Codice ISBN: 978-88-96354-31-5
Editore: Matematicamente.it
Anno di edizione: 2012
Prezzo: 0,00
Formato: ebook (PDF+ODT)

Prefazione

Guardando i libri di testo sia con gli occhi dell'insegnante che li usa, sia dell'autore che li scrive, ci si rende conto di un fatto banale: chi scrive i manuali scolastici sono gli insegnanti, chi li usa sono sempre gli insegnanti. Dal momento che oggi ci sono gli strumenti, sia quelli elettronici, sia il sistema della stampa su richiesta, che permettono di "circuitare" direttamente autori e fruitori, mi sono deciso a intraprendere la creazione di un manuale di matematica "libero", nel senso più ampio che oggi, nell'era delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, si usa dare a questo termine. Tuttavia, adottare "ufficialmente" un testo scolastico nella scuola italiana è un fatto semplice solo se si segue un percorso consolidato nel tempo, fatto più che altro di prassi e abitudini che non di leggi specifiche. Per rispondere a queste esigenze questo Manuale è fatto di Autori, Contenuti, Supporti e Dati legali.

Obiettivi. Il progetto "Matematica C^3" ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipologia di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza Creative Commons. Si propone, quindi, di abbattere i costi dell'istruzione, ridurre il peso dei libri, invogliare gli studenti che non avrebbero comprato un libro ad usarlo almeno in forma gratuita, promuovere l'auto-formazione per chi è fuori dai percorsi scolastici. Ha inoltre l'ambizione di avviare una sfida "culturale" più ampia di una scuola più democratica, più libera, dove ognuno possa accedere gratuitamente almeno alle risorse di base.

Autori. Il manuale è scritto in forma collaborativa da diverse decine di docenti di matematica sulla base della loro esperienza reale di insegnamento nelle diverse scuole. Alla sua realizzazione hanno contribuito anche studenti e appassionati. Tutti hanno contribuito in maniera gratuita e libera.

Contenuti. Matematica C3 si presenta come un *work in progress* sempre aggiornato e migliorabile da parte di tutti, docenti e studenti. Può essere liberamente personalizzato da ciascun insegnante per adeguarlo alla scuola in cui insegna, al proprio modo di lavorare, alle esigenze dei suoi studenti. È pensato non tanto per lo studio della teoria, che resta principalmente un compito dell'insegnante, quanto per fornire un'ampia scelta di esercizi da cui attingere per "praticare" la matematica. Lo stile scelto è quello di raccontare la matematica allo stesso modo in cui l'insegnante la racconta in classe di fronte agli studenti. Il libro quindi non è rivolto a un pubblico di studenti immaginari, ma agli studenti che noi docenti siamo abituati ad avere in classe. Gli argomenti sono trattati secondo un approccio laboratoriale, senza distinguere eccessivamente tra teoria ed esercizi: teoria, esempi svolti, esercizi guidati, esercizi da svolgere vengono presentati come un tutt'uno.

Supporti. Matematica C3 è scaricabile dal sito www.matematicamente.it. È disponile in formato elettronico pdf completamente gratuito; è disponibile anche nella versione per software liberi e gratuiti come OpenOffice o LibreOffice; è in lavorazione una versione in LaTeX. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono, in nessun caso ci sono diritti d'autore da pagare agli autori o all'editore. Il docente che vorrà sperimentare nuove forme d'uso può usarlo in formato elettronico su tablet pc, netbook o più semplicemente pc portatili, può proiettarlo direttamente sulla lavagna interattiva (LIM) interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori. A casa lo studente potrà usare il libro sullo stesso dispositivo che ha usato in classe (tablet pc, netbook, notebook) con le annotazioni e le modifiche fatte dall'insegnante, potra svolgere gli esercizi direttamente nel formato aperto di LibreOffice, quindi direttamente sul libro senza ricopiare la traccia degli esercizi, potrà scambiare file attraverso i social network (Facebook) o i sistemi di instant messaging (Skype) particolarmente diffusi tra i ragazzi.

Dati legali. Matematica C3 è rilasciato nei termini della licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia (CC BY-SA 3.0) il cui testo integrale è disponibile al sito http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/legalcode.

L'approccio di Matematica C3 è coerente con quanto sollecitato dallo stesso Ministero della Pubblica Istruzione. La circolare n.18 del 09.02.2012 afferma: "Le adozioni da effettuare nel corrente anno scolastico, a valere per il 2012/2013, presentano una novità di assoluto rilievo, in quanto, come è noto, i libri di testo devono essere redatti in forma mista (parte cartacea e parte in formato digitale) ovvero debbono essere interamente scaricabili da Internet. Pertanto, per l'anno scolastico 2012/2013 non possono più essere adottati né mantenuti in adozione testi scolastici esclusivamente cartacei."

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola: Titolo: Matematica C3, Algebra 2 seconda edizione - Codice ISBN: 9788896354315 - Editore: Matematicamente.it - Anno di edizione: 2012 - Prezzo: € 0,00 (zero) - Formato: ebook (PDF+ODT) .

Il coordinatore del progetto
prof. Antonio Bernardo

INDICE

CAPITOLO 1
NUMERI REALI E RADICALI

CAPITOLO 2
EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

CAPITOLO 3
EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

CAPITOLO 4
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

CAPITOLO 5
SISTEMI NON LINEARI

CAPITOLO 6
EQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI

CAPITOLO 7
LA PROBABILITA'

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2
1. NUMERI REALI E RADICALI



Jonycunha, Ponto de convergencia
http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/

Indice

►1. Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei **numeri naturali** racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n+m$ è il numero che si ottiene partendo da *n* e continuando a contare per altre *m* unità;
- *sottrazione*: $n-m$ è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a *m* dà come risultato *n*;
- *moltiplicazione*: $n\cdot m$ è il numero che si ottiene sommando *n* volte *m*, o meglio sommando *n* addendi tutti uguali a *m*;
- *divisione*: $n:m$ è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per *m* dà come risultato *n;*
- *potenza*: n^m è il numero che si ottiene moltiplicando *m* fattori tutti uguali a *n* con $m\geq 2$; e ponendo $n^1=n$ e $n^0=1$;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ con $n\geq 2$ è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a *n* dà come risultato *m*.

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, *n* ed *m*, la somma $n+m$ e il loro prodotto $n\cdot m$ è sempre un numero naturale; la potenza n^m , escluso il caso 0^0 , è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza $n-m$, il quoziente $n:m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$. Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre saper eseguire sempre queste operazioni.
Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca abbiamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo 10000-12000. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di 12000-10000. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno + o il segno -. Si genera così l'insieme dei **numeri relativi**

$$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.
Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre hai casi n:0 e 0:0, non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione 3:4. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere risolta. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuno toccano $\frac{3}{4}$ di uovo.

Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avra 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.
Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{3}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale 0,75. Le due scritture sono perfettametne equivalenti. Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei **numeri razionali** che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{m}\mid n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}, m\neq 0\right\}=\left\{0,+1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{2}{3,}-\frac{1}{5},-\frac{11}{17},\frac{129}{1725}...\right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero $\sqrt{2}$, cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; il quale non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono numeri irrazionali.
Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il

ragionamento.
Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo un quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale:



Dati :
OABC è un quadrato
$\overline{OA}=1$

Obiettivo:
Calcolare $\overline{OB}$

Soluzione: il triangolo OAB è rettangolo in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=2$
Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2=1^2+1^2=2$; per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata di 2, cioè $\overline{OB}=\sqrt{2}$. Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere, perché è il numero che esprime la misura della diagonale OB del quadrato. Ma quanto vale? Come facciamo ad esprimerlo sotto forma di numero decimale, finito o infinito che sia?
$\sqrt{2}$ non è un numero intero, infatti $1^2=1$ e $2^2=4$, il numero deve quindi essere compreso tra 1 e 2, cioè $1<\sqrt{2}<2$. Prendiamo tutti i numeri decimali a una sola cifra compresi tra 1 e 2 e calcoliamo il loro quadrato:

x	1	1,1	1,2	1,3	**1,4**	**1,5**	1,6	1,7	1,8	1,9	2
x^2	1	1,21	1,44	1,69	**1,96**	**2,25**	2,56	2,89	3,24	3,61	4

Nessuno dei numeri decimali a una cifra è il numero che stiamo cercando. Possiamo però osservare che il numero che stiamo cercando è compreso tra 1,4 e 1,5, cioè: $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$. Abbiamo così ottenuto due valori che approssimano $\sqrt{2}$ a meno di 1/10.
Possiamo migliorare l'approssimazione prendendo tutti i numeri a due cifre decimali compresi tra 1,4 e 1,5

x	1,40	**1,41**	**1,42**	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50
x^2	1,9600	**1,9881**	**2,0164**	2,0449	2,0736	2,1025	2,1316	2,1609	2,1904	2,1904	2,2500

Nessuno dei numeri elencato è quello che stiamo cercando, tuttavia possiamo concludere che $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.
E' possibile continuare indefinitamente questo procedimento, ottenendo valori decimali che approssimano sempre meglio $\sqrt{2}$. Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, migliorando a ogni passaggio l'approssimazione. Il procedimento purtroppo sembra non finire mai, né troviamo cifre che si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	numero	valore per eccesso	ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142.	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
…	…	…	...

Il procedimento che abbiamo visto ci dice semplicemente come costruire un'approssimazione del numero ma $\sqrt{2}$ ma non ci permette di concludere che il procedimento non finirà mai. Per arrivare a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, dobbiamo fare un ragionamento di tipo diverso, conducendo una "dimostrazione per assurdo".
Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e che quindi possa essere scritto in forma di frazione, precisamente $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Supponiamo di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ e che quindi *a* e *b* siano primi tra loro. Elevando al quadrato si ha : $2=\frac{a^2}{b^2}$, che possiamo scrivere come $a^2=2b^2$. Da ciò segue che a^2 è un numero pari, in quanto lo è $2b^2$. Se a^2 è pari lo è anche *a*, poiché il quadrato di un numero pari è pari. Se *a* è pari possiamo scriverlo nella forma *2m,* per cui si ha $2b^2=a^2=(2m)^2$ cioè $2b^2=(2m)^2$ .Sviluppiamo il quadrato al secondo membro: $2b^2=4m^2$,

semplifichiamo per 2 si ha: $b^2=2m^2$. Poiché $2m^2$ è pari lo è anche b^2 e per il ragionamento che abbiamo fatto prima lo è anche *b*. Siamo arrivati a concludere che a e b sono entrambi pari, il che non è possibile in quanto avevamo detto di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ mentre ora ci accorgiamo che essendo entrambi pari si poteva semplificare per 2. Il che è assurdo, pertanto la supposizione che $\sqrt{2}$ si potesse esprimere in forma di frazione è errata.
Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$, … Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero π, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.
Questi numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ad altri, come π ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme **J** dei numeri irrazionali.
L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e **J** è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali .

1 Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

2 Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso, come nell'esempio:

$\sqrt{3}$ A={1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; ...} B={2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206; ...}

a) $\sqrt{5}$ A={... B={...

b) $\frac{6}{7}$ A={... B={...

c) $\frac{1}{6}$ A={... B={...

►2. I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup J$, i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche.
Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625.
La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico 0,9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352...
Il numero π è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre:
π = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 ...
Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numero reale.
In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo r = n +0,abcdefg..., dove r è il numero reale, n è la parte intera è 0,abcd... è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione: 1 = 0,99999999... A ben osservare tutti i numeri decimali finiti ammettono la doppia rappresentazione: 1,225 = 1,22499999999... Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.
Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi a patire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$. La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$? Per rappresentare il numero $\sqrt{2}$ abbiamo costruito un insieme, chiamiamolo A, di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, chiamiamolo B, di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero $\sqrt{2}$ spezzi l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due parti: quella dei numeri razionali *a* tali che $a^2<2$ e quella dei numeri razionali *b* tali che $b^2>2$.

La coppia di insiemi (A, B) caratterizza il numero $\sqrt{2}$, anzi si può dire che $\sqrt{2}$ è proprio la coppia (A, B).

É proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama **sezione**, o partizione di $\mathbb{Q}$, una coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B che devono soddisfare le condizioni: $A\cap B=\emptyset$; $A\cup B=\mathbb{Q}$; $\forall a\in A, \forall b\in B, a<b$.

Esempi

- Cosideriamo i due insiemi A e B così definiti: $A=\{x\in\mathbb{Q} | x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q} | x\geq 3\}$. Essi definiscono una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti $A\cap B=\emptyset$; $A\cup B=\mathbb{Q}$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3.
- Siano $A=\{x\in\mathbb{Q} | x<-1\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q} | x>0\}$ la coppia (A, B) non è una sezione di $\mathbb{Q}$ perché pur essendo $A\cap B=\emptyset$ non è $A\cup B=\mathbb{Q}$.
- Siano $A=\left\{x\in\mathbb{Q} | x\leq\frac{2}{7}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{Q} | x\geq\frac{2}{7}\right\}$, anche in questo caso la coppia (A, B) non è una sezione di $\mathbb{Q}$ poiché $A\cap B=\left\{\frac{2}{7}\right\}$.
- Costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tuti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2. $A=\mathbb{Q}^{-}\cup\{x\in\mathbb{Q} | x^2<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q} | x^2>2\}$. Si ha $A\cap B=\emptyset$; $A\cup B=\mathbb{Q}$, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque (A, B) è una sezione di $\mathbb{Q}$, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non eisiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme $\mathbb{Q}$.

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione (A, B) può essere di tre tipi:

- A ammette massimo e B non ammette minimo;
- A non ammette massimo e B ammette minimo;
- A non ammette massimo e B non ammette minimo.

DEFINIZIONE. Si chiama **elemento separatore** di una partizione (A, B) di $\mathbb{Q}$ il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione (A, B) ammette un elemento separatore e identifica il numero razione 3.
Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione (A, B) identifica un numero irrazionale.

DEFINIZIONE. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo **numero irrazional**e le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.
Ritornando all'esempio precedente, il numero $\sqrt{2}$ è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi $A=\{x\in\mathbb{Q}/x<0 \text{ oppure } x^2<2\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Q}/x^2>2\}$.
Nell'insieme A ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto: $A=\{1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}414213; \ldots\}$.
Nell'insieme B ci sono tutti i numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per eccesso: $B=\{2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; 1{,}4143; 1{,}41422; 1{,}414214; \ldots\}$.

3 *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:*

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$, l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

Confronto. Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la

parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

Esempi

- $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri $\sqrt{2}=1{,}4142...$, $\sqrt{3}=1{,}7320...$; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3.
- $\sqrt{99}<10$ per verificarlo è sufficiente osservare che $\sqrt{100}=10$.

4 *Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso, come nell'esempio:* $5<\sqrt{30}<6$

a) $\sqrt{50}$ $\sqrt{47}$ $\sqrt{91}$ $\sqrt{73}$ $\sqrt{107}$ $\sqrt{119}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ $2\sqrt{7}$ $2+\sqrt{7}$ $\sqrt{20}-\sqrt{10}$ $\sqrt{\frac{7}{10}}$ $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$

5 *Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:*

a) $\sqrt{2}$ 1 $\frac{2}{3}$ $2{,}0\overline{13}$ $\sqrt{5}$ $\frac{3}{2}$ 0,75

b) π $\sqrt{3}$ $\frac{11}{5}$ $0{,}\overline{9}$ $\sqrt{10}$ $3{,}1\overline{4}$ $\sqrt[3]{25}$

Concludiamo il paragrafo con alcuni argomenti già accennati in Algebra 1 ma che trovano solo ora una giusta collocazione teorica.

DEFINIZIONE. Un insieme X si dice **continuo** se ogni partizione (X', X”) di X ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento x appartenente a X tale che per ogni x' di X' e per ogni x” di X” si ha x'≤x≤x”.

TEOREMA DI DEDEKIND. Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione (A,B) di numeri reali.

POSTULATO DI CONTINUITÀ DELLA RETTA. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedrete in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

6 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme **J** dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri

$\sqrt{3}$ $\sqrt[3]{5}$ π $0{,}\overline{3}$ 3,14 $\frac{3}{2}$ -2

7 *Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni*

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale V F
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale V F
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale V F
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F

►3. Richiami sul valore assoluto

Valore assoluto. Si definisce valore assoluto di un numero reale *a*, si indica con |a|, il numero stesso se *a* è positivo o nullo, il suo opposto se *a* è negativo.

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se} \quad a\geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a<0 \end{cases}$$

Il numero *a* si dice argomento del valore assoluto.

■ $|-3|=3$ ■ $|+5|=5$ ■ $|0|=0$

Proprietà del valore assoluto

- $|x+y|\leq|x|+|y|$ Il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.
- $|x-y|\leq|x|+|y|$ Il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.
- $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

Esempi

■ $|5+3|=|5|+|3|$ in entrambi i casi si ottiene 8

■ $|5+(-3)|=2$ mentre $|5|+|-3|=8$, pertanto $|5+(-3)|<|5|+|-3|$

8 *Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri*

a)	$\|-5\|$	$\|+2\|$	$\|-1\|$	$\|0\|$	$\|-10\|$
b)	$\|+3-5\|$	$\|-3+5\|$	$\|(-1)^3\|$	$\|-1-2-3\|$	$\|+3\cdot(-2)-5\|$

9 Due numeri reali x ed y sono entrambi non nulli e di segno opposto.
Verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati a fianco.

	Relazione	x=-3 y=+5	x=-2 y=+2	x=-10 y=+1	x=+1 y=-5
a)	|x| < |y|	V F	V F	V F	V F
b)	|x| = |y|	V F	V F	V F	V F
c)	|x| < y	V F	V F	V F	V F
d)	|x + y| < |x| + |y|	V F	V F	V F	V F
e)	|x - y| = |x| - |y|	V F	V F	V F	V F
f)	||x| - |y|| = |x - y|	V F	V F	V F	V F

Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?
a) dipende da x e y; b) dipende da x e y; c) dipende da x e y; d) sempre vera; e) sempre vera; f) sempre falsa.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x)<0 \end{cases}$$

Esempi

■ $|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ se } x\geq 1 \\ -x+1 \text{ se } x<1 \end{cases}$

■ $|x^2|=x^2$ infatti x^2 è una quantità sempre non negativa.

■ $|a^2+1|=a^2+1$ infatti a^2 è sempre positivo, aumentato di 1 sarà sempre >0.

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

■ $f(a)=|a+1|-3a+1$ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è

$$f(a)=|a+1|-3a+1=\begin{cases} a+1-3a+1 \text{ se } a+1\geq 0 \rightarrow a\geq -1 \\ -(a+1)-3a+1 \text{ se } a+1<0\rightarrow a<-1\end{cases}=\begin{cases}-2a+1 \text{ se } a\geq -1 \\ -4a \text{ se } a<-1\end{cases}$$

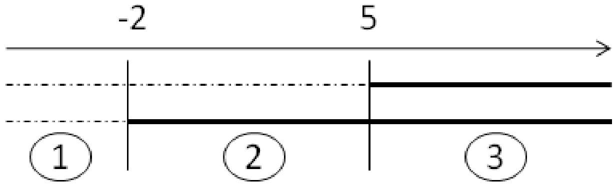
Una funzione di questo tipo si dice **definita per casi**.

- $|x-5|=\ x-5\ \text{ se }\ x\geq 5\ ;\ -(x-5)\ \text{ se }\ x<5$

Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni

Esempio

- $|x-5|+|x+2|$



L'argomento del primo valore assoluto $|x-5|$ è non negativo quando $x\geq 5$.

L'argomento del secondo valore assoluto $|x+2|$ è non negativo quando $x\geq -2$.

L'insieme dei numeri reali resta diviso in tre intervalli:

(1) $x<-2$ in questo intervallo entrambi gli argometni dei valori assoluti sono negativi, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)-(x+2)=-x+5-x-2=-2x+3$.

Se x=-2 si ha $|-2-5|+0=7$

(2) $-2<x<5$ l'argomento del primo valore assoluto è negativo mentre l'argomento del secondo valore assoluto è positivo, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)+(x+2)=-x+5+x+2=7$.

Se x=5 si ha $0+|5+2|=7$

(3) $x>5$ gli argomenti di entrambi i valori assoluti sono positivi, pertanto $|x-5|+|x+2|=(x-5)+(x+2)=2x-3$.

Possiamo allora sintetizzare in questo modo $|x-5|+|x+2|=\begin{cases}-2x+3 \ \text{ se } \ x<-2 \\ 7 \ \text{ se } \ -2\leq x<5 \\ 2x-3 \ \text{ se } \ x\geq 5\end{cases}$

Come nell'esempio, elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

10 $|x+1|$ $\qquad$ $|x-1|$

11 $|x^2+1|$ $\qquad$ $|(x+1)^2|$

12 $|x^2-1|$ $\qquad$ $|x^3-1|$

13 $|x^2-6x+8|$ $\qquad$ $|x^2+5x+4|$

14 $\dfrac{|x+1|}{|x+2|}$ $\qquad$ $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

15 $|x+1|+|x-2|$ $\qquad$ $|x+2|+|x-2|$

16 $|x-2|+|x-3|$ $\qquad$ $|x+1|\cdot|x+2|$

17 $\left|\dfrac{x+1}{4}\right|+\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|+\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$

►4. Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale *r* è il numero che si ottiene moltiplicando *r* per se stesso: $r^2=r\cdot r$. Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato: $(+3)^2=9$; $(-2)^2=+4$; $(-5)^2=(+5)^2=+25$.

L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama **radice quadrata**. La radice quadrata di un numero reale *a* è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero *a*.

Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato possa dare come risultato un numero negativo.

DEFINIZIONE. Si dice **radice quadrata** di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato. In simboli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ dove $a, b\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

Il simbolo $\sqrt{\ }$ è il simbolo della radice quadrata; il numero *a* è detto **radicando**, il numero *b* è detto **radice quadrata** di *a*.

Dalla definizione $\sqrt{a^2}=a$ con $a\geq 0$.

Per esempio $\sqrt{81}=9$ perché $9^2=81$; $\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$ perché $\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$.

Osserva ora che $\sqrt{81}=\sqrt{(-9)^2}$ ma non è vero che $\sqrt{(-9)^2}=-9$ perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata sia sempre un numero positivo o nullo.

Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione **quando il radicando è un'espressione letterale**: in questo caso $\sqrt{a^2}=a$ non è del tutto corretto poiché *a* può assumere sia valori positivi sia valori negativi. Scriveremo correttamente $\sqrt{a^2}=|a|$.

Esempi

- $\sqrt{4}=2$ infatti $2^2=4$
- $\sqrt{25}=5$ infatti $5^2=25$
- $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ infatti $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$
- $\sqrt{0{,}01}=0{,}1$ infatti $0{,}1^2=0{,}01$
- $\sqrt{1}=1$ infatti $1^2=1$
- $\sqrt{0}=0$ infatti $0^2=0$
- $\sqrt{-16}$ non esiste perché il radicando è negativo.
- $\sqrt{11}$ esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale.
- $\sqrt{x^2}=|x|$ dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conosciamo il segno di x.
- $\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$ dobbiamo mettere il valore assoluto perché a-2 può anche essere negativo.
- $\sqrt{9(x+1)^2}=3|x+1|$

18 *Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle)*

a) $\sqrt{9}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{-49}$ $\sqrt{64}$ $\sqrt{-81}$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ $\sqrt{\frac{49}{81}}$ $\sqrt{\frac{121}{100}}$ $\sqrt{\frac{144}{36}}$ $\sqrt{\frac{-1}{4}}$

c) $\sqrt{0{,}04}$ $\sqrt{0{,}09}$ $\sqrt{0{,}0001}$ $\sqrt{0{,}16}$ $\sqrt{-0{,}09}$

d) $\sqrt{\frac{144}{9}}$ $\sqrt{25\cdot 16}$ $\sqrt{36\cdot 49}$ $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}0121}$ $\sqrt{\frac{1}{100}}$

e) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$ $\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$

19 *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a 1/10:* $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{17}{4}}$

20 *Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto*

$\sqrt{a^2+2a+1}$ $\sqrt{4x^2+8x+4}$ $\sqrt{9-12a+4a^2}$

►5. Radici cubiche

DEFINIZIONE: Si dice **radice cubica** di un numero reale *a* quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[3]{a}=b \Leftrightarrow b^3=a$ dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale positivo o negativo o nullo esiste sempre.

Esempi

- $\sqrt[3]{-8}=-2$ infatti $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$
- $\sqrt[3]{125}=5$ infatti $5^3=5\cdot 5\cdot 5=125$
- $\sqrt[3]{1}=1$ infatti $1^3=1\cdot 1\cdot 1=1$
- $\sqrt[3]{0}=0$ infatti $0^3=0\cdot 0\cdot 0=0$
- $\sqrt[3]{-1000}=-10$ infatti $(-10)^3=-1000$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$
- $\sqrt[3]{0{,}125}=0{,}5$ infatti $(0{,}5)^3=0{,}125$
- $\sqrt[3]{x^3}=x$ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto
- $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$ non si deve mettere il valore assoluto

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre lo stesso segno della base.

►6. Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice n.

DEFINIZIONE. Si dice radice *n*-esima di un numero reale *a* quel numero *b* che elevato ad *n* dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Non si definisce la radice di indice 0: la scrittura $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato.
Alla scrittura $\sqrt[1]{a}$ si dà il valore *a*.

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

- se l'indice *n* è dispari la $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di $a \in R$, inoltre è negativa se $a<0$, positiva se $a>0$ e nulla se $a=0$;
- se l'indice *n* è pari la $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di $a \geq 0$ e si ha che $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Esempi

- $\sqrt[4]{16}=2$ infatti $2^4=16$
- $\sqrt[4]{-16}$ non esiste
- $\sqrt[5]{32}=2$ infatti $2^5=16$
- $\sqrt[4]{1}=1$ infatti $1^4=1$
- $\sqrt[n]{0}=0$ per ogni n>0
- $\sqrt[5]{-1}=-1$ infatti $(-1)^5=-1$
- $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è pari
- $\sqrt[5]{x^5}=x$ non va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

21 *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a 1/10*

$\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[3]{100}$ $\sqrt[3]{25}$ $\sqrt[3]{250}$

Determina le seguenti radici se esistono

22 $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{-1}$

23 $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{-216}$

24 $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$ $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$

25 $\sqrt[3]{0,001}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\sqrt[3]{-0,008}$

26 $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}$ $\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{122+\sqrt[3]{27}}}}$ $\sqrt[3]{27\cdot\sqrt{64}}$

27 $\sqrt[9]{0}$ $\sqrt[8]{-1}$ $\sqrt[5]{-100000}$

28 $\sqrt[4]{0,0001}$ $\sqrt[4]{81}$ $\sqrt[6]{64}$

29 $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ $\sqrt[4]{-4}$ $\sqrt[10]{0}$

30 $\sqrt[4]{0,0081}$ $\sqrt[5]{34+\sqrt[4]{14+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}}$ $\sqrt{20+\sqrt[3]{121+\sqrt[4]{253+\sqrt[5]{243}}}}$

31 $\sqrt{21+\sqrt{16}}$ $\sqrt[5]{31+\sqrt[4]{1}}$ $\sqrt[5]{240+\sqrt{9}}$

32 $\sqrt{\sqrt{0,16}}$ $\sqrt[5]{32\cdot10^{-5}}$ $\sqrt{3\sqrt{37-4\sqrt{81}\cdot27}}$

33 $\sqrt{72+\sqrt{80+\sqrt{1}}}$ $\sqrt{\frac{25a^4}{9}}$ $\sqrt[4]{620+\sqrt[4]{625}}$

34 $\sqrt{24336}$ $\sqrt[5]{243}$ $\sqrt[4]{600+\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}$

35 $\sqrt[3]{8a^3+12a^2+6a+1}$ $\sqrt[3]{a^6+9a^4+27a^2+27}$ $\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}$

►7. Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso.
Le **condizioni di esistenza**, in breve si può scrivere C.E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.
Supponiamo di avere $\sqrt[n]{A(x)}$ con A(x) polinomio nell'indeterminata x, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- se *n* è pari la radice esiste per tutti i valori di *x* che rendono non negativo il radicando, cioè C.E. $A(x)\geq 0$
- se *n* è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile x, purché esista il radicando stesso.

Esempi

- ■ $\sqrt{x}$ C.E. $x\geq 0$ $\sqrt[3]{x}$ C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt{-x}$ C.E. $x\leq 0$ $\sqrt[3]{-x}$ C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt{x-1}$ C.E. $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$
- ■ $\sqrt{a^2+1}$ C.E. $\forall a\in\mathbb{R}$, infatti a^2 è sempre positivo pertanto $a^2+1>0\,\forall a\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$ C.E. La radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando,

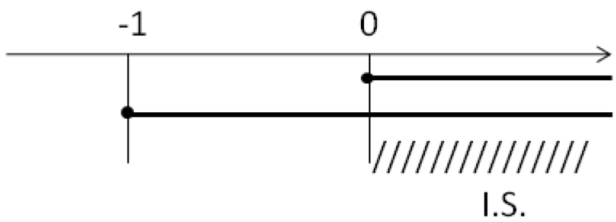
tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi C.E. $x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1$.

- ■ $\sqrt[4]{xy}$ C.E. $xy\geq 0$
- ■ $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

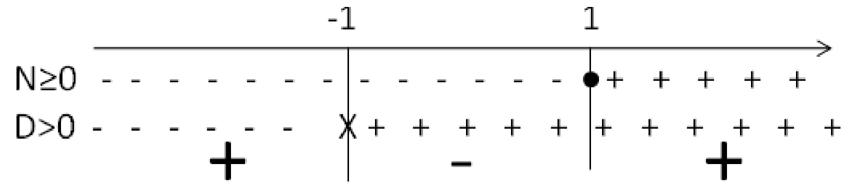
C.E. $\sqrt{x}$ esiste per $x\geq 0$, $\sqrt{x+1}$ esiste per $x+1\geq 0$, per individuare le condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il sistema

$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\geq 0\end{cases}$ cioè $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq -1\end{cases}$

In definitiva C.E. $x\geq 0$.



- ■ $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ C.E. $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$ Occorre discutere il segno della frazione



Pertanto C.E. $x<-1\vee x\geq 1$

- ■ $\sqrt[5]{a^2(a-3)}$ Poiché la radice ha indice dispari non occorre porre nessuna condizione di esistenza.

Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

36 $\sqrt[3]{x+1}$ $R. \forall x \in \mathbb{R}$ — $\sqrt{1-x}$ $R. x \leq 1$

37 $\sqrt{\frac{1}{x+1}}$ $R. x > -1$ — $\sqrt{3x^2 y}$ $R. y \geq 0$

38 $\sqrt[3]{3xy}$ — $\sqrt[4]{-2x^2 y^2}$

39 $\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x-1}}$ — $\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$

40 $\sqrt{\frac{4-x}{x-3}}$ — $\sqrt{x^2(x+1)}$

41 $\sqrt[3]{1+a^2}$ — $\sqrt[6]{2x-1}$

42 $\sqrt{1-x}+2\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ — $\sqrt{1+|x|}$

43 $\sqrt{(a-1)(a-2)}$ — $\sqrt{|x|+1} \cdot \sqrt[3]{x+1}$

44 $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}$ — $\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{3-x}}$

45 $\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$ $R. -2 < x \leq 5$ — $\sqrt{\frac{2y}{(2y+1)^2}}$

46 $\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$ — $\sqrt{\frac{a}{a^2-a-2}}$

47 $\sqrt{\frac{1}{b^2-4}}$ $R. b < -2 \vee b > 2$ — $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}}$

48 $\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}$ — $\sqrt[6]{\frac{x-1}{|x|}}$

49 $\sqrt[4]{\frac{4x^2+4+8x}{9}}$ — $\sqrt[6]{\frac{(b^2+1+2b)^3}{729b^6}}$

50 $\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-4}}$ $R. 0 < x < 1 \vee x > 4$ — $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}}$

51 $\sqrt[4]{\frac{m+1}{m-1}}$ — $\sqrt[3]{x(x+2)^2}$

52 $\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}$ — $\sqrt{\frac{a+2}{a(a-4)}}$

53 $\sqrt{\frac{1}{b^2-4}}$ — $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$

54 $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ — $\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$

55 $\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ — $\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+1}}$

56 $\sqrt{2x+3}$ — $\sqrt[3]{a^2-1}$

57 $\sqrt{x(x+1)(x+2)}$ — $\sqrt{|x|+1}$

58 $\sqrt{\frac{x}{|x+1|}}$ — $\sqrt{\frac{1}{-x^2-1}}$

►8. Potenze a esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale a≥0 sotto forma di potenza di a, vogliamo cioè che sia:

$$\sqrt[n]{a}=a^x$$

Caso con esponente positivo

Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza *n* otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(a^x\right)^n \quad \text{da cui si ottiene} \quad a=a^{n\cdot x}$$

Trattandosi di due potenze con base a≥0 uguali tra loro, l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere:

$$1=n\cdot x \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{n}$$

Possiamo quindi scrivere: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia *m* un numero intero positivo, possiamo scrivere

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Pertanto possiamo scrivere che $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Esempi

- Calcola $27^{\frac{2}{3}}$

Si ha che $27^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=3^2=9$

- Calcola $25^{\frac{3}{2}}$

Si ha che $25^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[2]{25}\right)^3=5^3=125$

Caso con esponente negativo

Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione a≠0, infatti risulta:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Esempi

- $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$
- $125^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^{-2}}=\sqrt[3]{(5^3)^{-2}}=\sqrt[3]{(5^{-2})^3}=5^{-2}=\frac{1}{25}$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}}=\sqrt{8^3}=\sqrt{(2^3)^3}=\sqrt{2^9}$
- $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}=(49)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$

In generale si dà la seguente

> DEFINIZIONE. Si dice **potenza a esponente razionale** $\frac{m}{n}$ di un numero reale positivo *a* l'espressione:
>
> $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{con} \quad \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che *a* sia un numero positivo?

Partiamo dall'espressione $a^{\frac{1}{n}}$ con $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, se n è dispari la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base a, mentre se è pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per a≥0.

Nel caso generale $a^{\frac{m}{n}}$ con $m\in\mathbb{Z}$ la formula $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è falsa se a<0.

Infatti facciamo un esempio:

$(-2)^{\frac{6}{6}}=\left\{(-2)^{\frac{1}{6}}\right\}^6=\left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ che non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo.

Tuttavia possiamo anche scrivere $(-2)^{\frac{6}{6}}=\left\{(-2)^6\right\}^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.
Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

Calcola le seguenti potenze con esponente razionale

59 $4^{\frac{3}{2}}$ $8^{\frac{2}{3}}$ $9^{-\frac{1}{2}}$ $16^{\frac{3}{4}}$

60 $16^{\frac{5}{4}}$ $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ $125^{-\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$

61 $25^{-\frac{3}{2}}$ $27^{\frac{4}{3}}$ $32^{\frac{2}{5}}$ $49^{-\frac{1}{2}}$

62 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}$ $(0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$

63 $4^{0{,}5}$ $16^{0{,}25}$ $32^{0{,}2}$ $100^{0{,}5}$

Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario

64 $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{8^2}$ $\sqrt[7]{5^3}$ $\sqrt{3^3}$

65 $\sqrt{\left(\frac{1}{3^3}\right)}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ $\sqrt[5]{\frac{4^2}{3^2}}$

66 Trasforma nella forma radicale le espressioni:

$$\left((a^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \left(1+\left(1+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

67 Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri

0,00000001 $(0{,}1)^{10}$ $(0{,}1)^{0{,}1}$ 10^{-10} $\sqrt{0{,}0000000001}$

►9. Proprietà invariantiva e semplificazione delle radici

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ non cambia se **moltiplichiamo** l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo.

In simboli $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nt]{a^{mt}}$ con $a\geq 0, m, n, t\in\mathbb{N}-\{0\}$

- $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}$ abbiamo moltiplicato indice della radice ed esponente del radicando per 2.
- $\sqrt[3]{a}=\sqrt[9]{a^3}$ abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune.
In simboli $\sqrt[nt]{a^{mt}}=\sqrt[n]{a^m}$ con $a\geq 0, m, n, t\in\mathbb{N}-\{0\}$

- $\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$ abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando.
- $\sqrt[10]{3^{15}}=\sqrt{3^3}$ abbiamo semplificato per 5.
- $\sqrt[7]{3^9}$ non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni.
- $\sqrt[8]{2^6}=2^{\frac{6}{8}}=$ semplificando la frazione dell'esponente $=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$
- $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}=\sqrt[6]{5^9}=\sqrt[2]{5^3}$
- $\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$
- $\sqrt{10^{-4}}$ semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ha $10^{-2}=\frac{1}{100}$
- $\sqrt{30\cdot 27\cdot 10}$ scomponendo in fattori primi otteniamo le seguenti potenze
$$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 3^3\cdot 2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}=2\cdot 3^2\cdot 5=90$$

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere

$$\sqrt[nt]{a^{mt}}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^m} & \text{se t è dispari}\\ \sqrt[n]{|a^m|} & \text{se t è pari}\end{cases}$$

- $\sqrt{4x^4y^2a^6}=\sqrt{2^2x^4y^2a^6}=2x^2|ya^3|$ abbiamo semplificato per 2 gli esponenti e la radice stessa.
- $\sqrt[12]{a^2+2a+1}=\sqrt[12]{(a+1)^2}=\sqrt[6]{|a+1|}$ Dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 gli indici.
- $\sqrt{x^2y^2}=|xy|$; $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$; $\sqrt{x^2+y^2}$ non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza.
- $\sqrt[6]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{|x-1|}$

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno, come mostrato dal seguente esempio:
- $\sqrt[10]{(-2)^6}\neq\sqrt[5]{(-2)^3}$

infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.
Invece la concordanza del segno è conservata in questo esempio:
- $\sqrt[9]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2}$

Infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.
Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto:
- $\sqrt[10]{(-2)^6}=\sqrt[5]{|-2^3|}$

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno.
- $\sqrt[10]{x^6}=\sqrt[5]{|x^3|}$ C.E: x può assumere qualunque valore di R

Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva

68 $\sqrt[4]{4}=\sqrt[8]{\dots}$ $\qquad \sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{\dots}$ $\qquad \sqrt[5]{5}=\sqrt[15]{\dots}$ $\qquad \sqrt{2}=\sqrt[6]{\dots}$

69 $\sqrt{2}=\sqrt[\dots]{16}$ $\qquad \sqrt[3]{3}=\sqrt[\dots]{81}$ $\qquad \sqrt[3]{-5}=-\sqrt[\dots]{25}$ $\qquad \sqrt[4]{\frac{3}{2}}=\sqrt[\dots]{\frac{27}{8}}$

70 $\sqrt[21]{a^7}=\sqrt[6]{\dots}$ con a>0 $\qquad \sqrt[8]{a^{24}}=\sqrt[5]{\dots}$ con a>0 $\qquad \sqrt[3]{27}=\frac{1}{\sqrt{\dots}}$ $\qquad \sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt[7]{\dots}$

Semplifica i radicali

71 $\sqrt[4]{25}$ $\qquad \sqrt[6]{8}$ $\qquad \sqrt[8]{16}$

72 $\sqrt[9]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{100}$ $\qquad \sqrt[6]{144}$

73 $\sqrt[4]{169}$ $\qquad \sqrt[6]{121}$ $\qquad \sqrt[6]{125}$

74 $\sqrt[4]{49}$ $\qquad \sqrt[6]{64}$ $\qquad \sqrt[12]{16}$

75 $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$ $\qquad \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ $\qquad \sqrt[10]{\frac{25}{81}}$

76 $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}$ $\qquad \sqrt[9]{-3^3}$ $\qquad \sqrt[6]{(-2)^4}$

77 $\sqrt[12]{-4^6}$ $\qquad \sqrt[10]{-32}$ $\qquad \sqrt[6]{5^2-4^2}$

78 $\sqrt[4]{12^2+5^2}$ $\qquad \sqrt[10]{3^2+4^2}$ $\qquad \sqrt[4]{10^2-8^2}$

79 $\sqrt[3]{2^6\cdot 5^{15}}$ $\qquad \sqrt[4]{3^4\cdot 4^6}$ $\qquad \sqrt[5]{5^5\cdot 4^{10}\cdot 2^{15}}$

80 $\sqrt[9]{27\cdot 8\cdot 125}$ $\qquad \sqrt[4]{625}$ $\qquad \sqrt[6]{1000}$

81 $\sqrt[4]{2+\frac{17}{16}}$ $\qquad \sqrt[6]{\left(\frac{13}{4}+\frac{1}{8}\right)^4}$ $\qquad \sqrt[6]{\left(1+\frac{21}{4}\right)^3}$

82 $\sqrt[16]{(-16)^4}$ $\qquad \sqrt[10]{2^{10}\cdot 3^{20}}$ $\qquad \sqrt[6]{2^8\cdot 3^6}$

83 $\sqrt[12]{3^6\cdot 4^{12}}$ $\qquad \sqrt[4]{2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 12^5}$ $\qquad \sqrt[6]{3^9\cdot 8^2}$

84 $\sqrt[4]{9x^2y^4}$ $\qquad \sqrt[3]{64a^6b^9}$ $\qquad \sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$

85 $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}$ $\qquad \sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}$ $\qquad \sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$

86 $\left(\sqrt{a+1}\right)^6$ $\qquad \sqrt[9]{27a^6b^{12}}$ $\qquad \sqrt[12]{(2x+3)^3}$

87 $\sqrt[6]{\frac{0,008x^{15}y^9}{8a^{18}}}$ $\qquad \sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$ $\qquad \sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$

88 $\sqrt[6]{a+2a+1}$ $\qquad \sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}$ $\qquad \sqrt{3a^2+\sqrt{a^4}}$

89 $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}$ $\qquad \sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$ $\qquad \sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$

90 $\sqrt[6]{\frac{9x^2}{y^6}}$ $\qquad \sqrt[4]{\frac{16a^4b^6}{25x^2}}$ $\qquad \sqrt{\frac{2x^2-2}{8x^2-8}}$

91 $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}$ $\qquad \sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$ $\qquad \sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$

92 $\sqrt[4]{a^2+6a+9}$ $\qquad \sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}$ $\qquad \sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$

93 $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$ $\qquad \sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}$ $\qquad \sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-2a+1}$

94 $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}$ $\qquad \sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7\left(x^3+3x^2+3x+1\right)^2}}$ $\qquad \sqrt{\frac{\left(x^3+x^2y\right)(a+2)}{2x+2y+ax+ay}}$

95 $\sqrt[2n]{16^n}$ $\qquad \sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$ $\qquad \sqrt[n^2]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$

96 $\sqrt[3n]{27^n\cdot 64^{2n}}$ $\qquad \sqrt[2n^2]{16^{2n}\cdot 81^{2n}}$ $\qquad \sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$

97 $\sqrt[5]{25x^3y^4}$ $\qquad \sqrt[12]{81a^6b^{12}}$ $\qquad \sqrt[5]{32x^{10}}$

►10. Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero.

Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

Esempi

- ■ $\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=6^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{6^7}$
- ■ $\sqrt[4]{6}:\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}:6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=6^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{6}}$

Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Anche per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esempi

- ■ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$
- ■ $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}=\sqrt[3]{\frac{9}{72}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$
- ■ $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}$ C.E. $a\geq 0\wedge b>0$ $\quad\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}=\sqrt{2a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{9}{2b}}=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}}=\frac{3a}{b}$

Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti con lo stesso indice usando la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

Procedura per ridurre due o più radici allo stesso indice:

1° passo: scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;
2° passo: porre le condizioni di esistenza;
3° passo: calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;
4° passo: per ciascuna radice dividere il m.c.m. per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.

Esempi

- ■ $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro m.c.m. è 6, il primo radicando va elevato a 6:2 cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a 6:3 cioè 2

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}$$

- ■ $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

Il m.c.m. tra gli indici delle radici è 12. Il primo radicando va elevato a 12:3=4; il secondo radicando va elevato a 12:4=3; il terzo va elevato a 12:6=2.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{8^3}{27^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{(2^3)^3}{(3^3)^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2^9}{3^9}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 2^9}{3^9\cdot 2^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}}=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}$ C.E. $x>0\wedge y>0$. Il m.c.m. degli indici delle radici è 6, quindi

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x^2 y)^2\cdot(xy)^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^4 y^2 x^3 y^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^7 y^5}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{x^5 y^2}$$

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero

Esempio

- $\sqrt[3]{\dfrac{ax+a}{x^2+2x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{ax-a}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{a(x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$

Poniamo le C.E. $x\neq-1\wedge(a>0\wedge x>1)\vee(a<0\wedge x<1)$

Semplifichiamo le frazioni di ciascun radicando $\sqrt[3]{\dfrac{a}{x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$

Trasformiamo nello stesso indice: il m.c.m. degli indici è 6, quindi

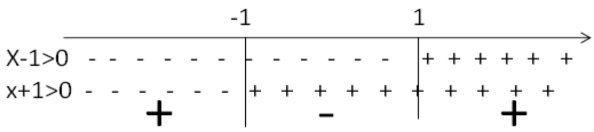
$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x-1)^3}{a^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

Esempio

- $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}}:\sqrt[4]{\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$

Determiniamo le C.E. $(x-1)(x+1)>0$



$x<-1\vee x>1$

Per le condizioni di esistenza bisogna tener conto che $\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$ essendo il divisore deve essere diverso da zero, cioè non si deve annullare neanche il numeratore della frazione, quindi $x\neq-1\wedge x\neq+1$. Semplifichiamo i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{(x-1)\cdot(x+1)}$

Riduciamo allo stesso indice: il m.c.m. degli indici è 12 $\sqrt[12]{\left[\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4}:\sqrt[12]{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$

Poniamo sotto la stessa radice $\sqrt[12]{\dfrac{x^8}{(x-1)^8}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^8}{(x-1)^{11}\cdot(x+1)^3}}$.

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali

98 $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ $\quad$ $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$

99 $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$ $\quad$ $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt{50}$ $\quad$ $\sqrt{40}:(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})$

100 $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{45}$ $\quad$ $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{9}$ $\quad$ $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{6}:\sqrt[5]{12}$

101 $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[6]{81}:\sqrt[6]{9}$ $\quad$ $\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}$ $\quad$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

102 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}$ $\quad$ $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

103 $\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}:\sqrt[4]{\frac{2}{25}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$ $\quad$ $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^3}$

104 $\left(\sqrt[3]{\frac{42}{13}}:\sqrt[3]{\frac{91}{36}}\right):\sqrt{13}$ $\quad$ $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{24}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ $\quad$ $\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

105 $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[10]{2^4}$ $\quad$ $\sqrt{15}\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{8}$ $\quad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

106 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}$ $\quad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

107 $\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}}:\sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{12}$ $\quad$ $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$

108 $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{12a}$ con a>0 $\quad$ $\sqrt{3a}:\sqrt{\frac{1}{5}a}$ con a >0

109 $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^2}$ $\quad$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$

110 $\sqrt{\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^6b}{2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}a}:\sqrt[6]{3a}$

111 $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[5]{ay}$ $\quad$ $\sqrt[3]{(x+1)^2}:\sqrt{x-1}$

112 $\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a+b}$ $\quad$ $\sqrt{a^2-3a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

113 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}:\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$

114 $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}:\sqrt{\frac{2}{a}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a+1}{a-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}}$

115 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}}$ $\quad$ $\sqrt{a^4b}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$

116 $\sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}:\sqrt{x+y}$

117 $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ *R.* $\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{4a^4-9}\cdot\sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$

118 $\sqrt{\frac{9-a^2}{(a+3)^2}}\cdot\sqrt{\frac{27+9a}{3-a}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}}$

119 $\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}}$ $\quad$ $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}}\cdot\sqrt[6]{a^2-4b^2}$

120 $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}$ $\quad$ *R.* $\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$

121 $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$

►11. Potenza di radice e radice di radice

Per elevare a potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, le radici in esponenti con indici frazionari:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Esempi

- $\left(\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2^2}=2$
- $\left(\sqrt[3]{2ab^2c^3}\right)^2=\sqrt[3]{4a^2b^4c^6}$

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$.

Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Esempi

- $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[2\cdot 2]{2}=\sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x}}=\sqrt[12]{2x}$

122 $\left(\sqrt{3}\right)^2$ $\quad\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ $\quad\left(\sqrt{4}\right)^2$ $\quad\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$

123 $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ $\quad\left(3\sqrt{5}\right)^2$ $\quad\left(5\sqrt{2}\right)^2$ $\quad\left(-2\sqrt{5}\right)^2$

124 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$ $\quad\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2$ $\quad\left(a\sqrt{2a}\right)^2$ $\quad\left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$

125 $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\quad\left(3\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\quad\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\quad\left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9}\right)^3$

126 $\left(\sqrt{3}\right)^3$ $\quad\left(2\sqrt{5}\right)^3$ $\quad\left(3\sqrt{2}\right)^3$ $\quad\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

127 $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ $\quad\left(\sqrt[3]{5}\right)^5$ $\quad\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ $\quad\left(\sqrt[6]{3}\right)^4$

128 $\left(\sqrt[6]{3ab^2}\right)^4$ $\quad\left(\sqrt[4]{16a^2b^3}\right)^2$ $\quad\left(\sqrt[3]{6a^3b^2}\right)^4$ $\quad\left(\sqrt[3]{81ab^4}\right)^4$

129 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ $\quad\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$ $\quad\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$ $\quad\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$

130 $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\quad\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ $\quad\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$ $\quad\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}}$

131 $\sqrt{\sqrt[3]{3a}}$ $\quad\sqrt{\sqrt[4]{3ab}}$ $\quad\sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}$ $\quad\sqrt[4]{\sqrt{(2a)^5}}$

132 $\sqrt{2(a-b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}$ $\quad\sqrt{3(a+b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}}$

►12. Portare un fattore dentro il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice bisogna elevarlo all'indice della radice:

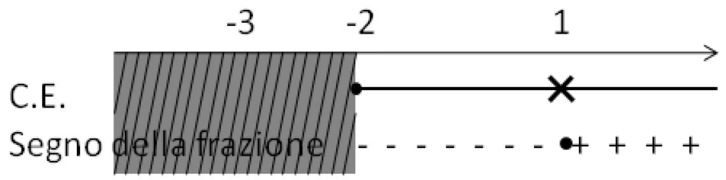
$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}\quad \text{se } n \text{ pari e } a\geq 0$$
$$a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n\cdot b}\quad \text{se } n \text{ pari e } a<0$$
$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}\quad \text{se } n \text{ dispari}$$

Ricordando che abbiamo posto $\sqrt[1]{a}=a$, portare un fattore sotto radice quivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

Esempi

- $2\sqrt[3]{5}$ portare il 2 dentro il segno di radice $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$
- $2\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56}$
- $3\cdot\sqrt{\frac{2}{21}}=\sqrt{3^2\cdot\frac{2}{21}}=\sqrt{9\cdot\frac{2}{21}}=\sqrt{\frac{6}{7}}$.
- $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ lasciamo fuori dalla radice il segno meno $-\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3}=-\sqrt{\frac{3}{4}}$
- $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{12}=-\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 12}=-\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 12}=-\sqrt{\frac{4}{3}}$
- $(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=-(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 3}$
- $-2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-2)^3\cdot 5}=\sqrt[3]{-40}$
- $a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3 b}$ l'indice della radice è dispari pertanto si porta sotto radice senza alcuna condizione.
- $(x-1)\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(x-1)^3\cdot x}$ l'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla x.
- $(x-2)\sqrt{y}$ Intanto osserviamo che il radicale esiste per $y\geq 0$.
  Per portare dentro il segno di radice il coefficiente (x-2) bisogna fare la distinzione:
  $$(x-2)\sqrt{y}=\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2 y} & \text{se } x\geq 2\\ -(2-x)\sqrt{y}=-\sqrt{(2-x)^2 y} & \text{se } x<2\end{cases}$$
- $(x-1)\sqrt{x-2}$ Il radicale esiste per $x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2$, per questi valori il coefficiente esterno (x-1) è positivo e può essere portato dentro la radice $(x-1)\sqrt{x-2}=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$.
- $\frac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}$

Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale. Per l'esistenza della frazione $\frac{a+2}{(a-1)^2}$ deve essere $(a-1)^2\neq 0,$ ovvero $a\neq 1.$. Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per $a\neq 1$) è sufficiente che sia $a+2\geqslant 0$ ovvero $a\geqslant -2$.
Pertanto le condizioni di esistenza sono $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$
Studiamo il segno della frazione algebrica da portare sotto radice. Risulta che tale frazione è positiva per $a<-3\vee a\geqslant 1$ mentre è negativa per $-3<a\leqslant 1$, a=1 la rende nulla.
Tenendo conto delle C.E. $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$ i due casi da esaminare sono $a>1$ e $-2<a<1$.



Se $a>1$ si ha $\frac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$

Se $-2<a<1$ il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi

$$-\left(-\frac{a-1}{a+3}\right)\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{[-(a-1)]^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

Se a=-2 l'espressione da calcolare vale zero.
Il caso a =1 è escluso dalla condizione di esistenza.

►13. Portare uno o più fattori fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si parte da un radicale del tipo:

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{con} \quad m \geq n$$

si divide *m* per *n* e si porta fuori il termine *a* elevato al quoziente *q* della divisione intera, cioè a^q va fuori dalla radice, mentre rimane dentro il segno di radice il termine *a* elevato al resto *r* della divisione intera, cioè a^r resta sotto radice. Quindi si ha:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q \sqrt[n]{a^r}$$

dove *q* è il quoziente della divisione intera *m:n* ed *r* è il resto della stessa divisione.
Si può anche procedere trasformando la potenza a^m nel prodotto di due potenze, una delle quali può essere semplificata con la radice. Per esempio, $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \sqrt[3]{a^2}$
Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a| \sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt{1200}$ Si scompone in fattori primi il radicando $1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$ ne segue allora che $\sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5 \sqrt{3} = 20 \sqrt{3}$
- $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5 \sqrt{3}$
- $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12 \sqrt{5}$
- $\sqrt{2a^2} = |a| \sqrt{2}$ bisogna mettere a in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva.
- $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3}$ Portare fuori dal segno di radice il maggior numero di fattori.
Occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice.
Cominciamo da a^5 risulta 5:3 = quoziente 1, resto 2; per b^7 si ha 7:3 = quoziente 2, resto 1; per c non è possibile portare niente fuori; per d^3 si ha 3:3= quoziente 1, resto 0.
In definitiva $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3} = ab^2 d \sqrt[3]{a^2 bc}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 x^3 y}{z^6}}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 x^3 y}{z^6}} = 3 \dfrac{x}{z^2} \sqrt[3]{y}$
- $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili
Raccogliamo a fattor comune dentro la radice per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:
$\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4 (1-x)}$ C.E. $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$
Pertanto $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4 (1-x)} = |x| \sqrt[4]{4(1-x)} = \begin{cases} x \sqrt[4]{4(1-x)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x \sqrt[4]{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{3(a-1)^2}$ portare fuori dalla radice $\sqrt{3(a-1)^2} = |a-1| \sqrt{3} = \begin{cases} (a-1)\sqrt{3} & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a = 1 \\ (1-a)\sqrt{3} & \text{se } a < 1 \end{cases}$

Trasporta dentro la radice i fattori esterni

133 $2\sqrt{2}$ $\quad 3\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad 3\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt{3}$

134 $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{6}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad 2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ $\quad 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

135 $-3\sqrt{3}$ $\quad -2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}$ $\quad \frac{-1}{5}\sqrt{5}$ $\quad -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$ $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$

136 $x\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\quad x^2\sqrt[3]{x}$ $\quad a\sqrt{2}$ $\quad x^2\sqrt[3]{3}$ $\quad 2a\sqrt{5}$ $\quad a\sqrt{-a}$

137 $(a-1)\sqrt{a}$ $\quad (x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}$ $\quad x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$

138 $\frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}$ $\quad \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}-x}$ $\quad \frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$

Semplifica i radicali portando fuori dei fattori

139 $\sqrt{250}$ $\quad R.[5\sqrt{10}]$ $\quad \sqrt{486}$ $\quad R.[9\sqrt{6}]$

140 $\sqrt{864}$ $\quad R.[12\sqrt{6}]$ $\quad \sqrt{3456}$ $\quad R.[24\sqrt{6}]$

141 $\sqrt{20}$ $\quad \sqrt{0{,}12}$ $\quad \sqrt{45}$ $\quad \sqrt{48}$

142 $\sqrt{98}$ $\quad \sqrt{50}$ $\quad \sqrt{300}$ $\quad \sqrt{27}$

143 $\sqrt{75}$ $\quad \sqrt{40}$ $\quad \sqrt{12}$ $\quad \sqrt{80}$

144 $\sqrt{\frac{18}{80}}$ $\quad \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{9}}$ $\quad \sqrt{1-\frac{9}{25}}$ $\quad \sqrt{\frac{10}{3}+\frac{2}{9}}$

145 $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}$ $\quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}$ $\quad \frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}}$ $\quad \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$

146 $\sqrt[3]{250}$ $\quad \sqrt[3]{24}$ $\quad \sqrt[3]{108}$ $\quad \sqrt[4]{32}$

147 $\sqrt[4]{48}$ $\quad \sqrt[4]{250}$ $\quad \sqrt[5]{96}$ $\quad \sqrt[5]{160}$

148 $\sqrt{x^2 y}$ $\quad \sqrt{\frac{a^5}{b^2}}$ $\quad \sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{d^9}}$ $\quad \sqrt{4ax^2}$

149 $\sqrt{9a^2b}$ $\quad \sqrt{2a^2x}$ $\quad \sqrt{x^3}$ $\quad \sqrt{a^7}$

150 $\sqrt[3]{16a^3x^4}$ $\quad \sqrt[3]{4a^4b^5}$ $\quad \sqrt[3]{27a^7b^8}$ $\quad \sqrt{18a^6b^5c^7}$

151 $\sqrt{a^2+a^3}$ $\quad \sqrt{4x^4-4x^2}$ $\quad \sqrt{25x^7-25x^5}$ $\quad \sqrt[3]{3a^5b^2c^9}$

152 $\sqrt[4]{16a^4b^5c^7x^6}$ $\quad \sqrt[5]{64a^4b^5c^6d^7}$ $\quad \sqrt[6]{a^{42}b^{57}}$ $\quad \sqrt[7]{a^{71}b^{82}}$

153 $\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^7}$ $\quad R.[(a+a^2+a^3)\sqrt{a}]$

►14. Somma di radicali

Si dice **radicale** un'espressione del tipo $a\sqrt[n]{b}$ con a e b numeri reali, b≥0 ed n∈N. Il numero a prende il nome di **coefficiente** del radicale.
Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

DEFINIZIONE. Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili e si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

- $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
- $2\sqrt{45}-\sqrt{80}=2\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Attenzione quindi a non scrivere scritture errate come la seguente $\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}}_{\text{ERRATO}}$.

Esempi

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
- $\frac{1}{2}\sqrt{7}-\frac{4}{3}\sqrt{7}=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{7}=\frac{3-8}{6}\sqrt{7}=-\frac{5}{6}\sqrt{7}$
- $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ sommiamo tra di loro i radicali simili
  $=(3-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$
- $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$
- $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^6}:\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3\cdot a^2}+\sqrt[4]{a^6:a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}=3\sqrt[4]{a^5}$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-1\right)=1\cdot 3\sqrt{2}-1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1+3\sqrt{2^2}-\sqrt{2}=$
  $=3\sqrt{2}-1+3\cdot 2-\sqrt{2}=2\sqrt{2}+5$
- $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$
- $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{2})=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$
- $\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=(3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2\cdot 3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
- $\left(\sqrt{2}+4\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot 3+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+4\cdot 3+4\cdot(-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2+12-4\sqrt{2}=10-\sqrt{2}$
- $\left(\sqrt{2}-3\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2(-3)+3\sqrt{2}(-3)^2+(-3)^3=\sqrt{2^3}+3(2)(-3)+3(9)\sqrt{2}-27=$
  $=2\sqrt{2}-18+27\sqrt{2}-27=29\sqrt{2}-45$

Esegui le seguenti operazioni con radicali

154 $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

155 $8\sqrt{6}-3\sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

156 $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ $\qquad$ $2\sqrt{7}-7\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

157 $11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ $\qquad$ *R.* $[3(\sqrt{5}+\sqrt{2})]$

158 $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})]$ $\qquad$ *R.* $[7\sqrt{7}]$

159 $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

160 $3\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$ $\qquad$ *R.* $3\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$

161 $5\sqrt{10}-(6+4\sqrt{19})+2-\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

162 $-3\sqrt{7}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{7}+8\sqrt{3}$ $\qquad$ $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+6\sqrt{6}-7\sqrt{3}-8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$

163 $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ $\qquad$ $5\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6}+3\sqrt[3]{6}-2\sqrt{6}$

164 $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$ $\qquad$ *R.* $[\sqrt{3}-\sqrt{2}]$

165 $3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$ $\qquad$ *R.* $[0]$

166 $3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450})$ $\qquad$ *R.* $[0]$

167 $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$ $\qquad$ *R.* $[\sqrt[4]{2}+12\sqrt[3]{2}]$

168 $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$ $\qquad$ *R.* $[\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3}]$

169 $\sqrt{\frac{32}{25}}-\sqrt{\frac{108}{25}}+\sqrt{\frac{27}{49}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}}$ $\qquad$ *R.* $[\frac{2}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{7}\sqrt{3}]$

170 $2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}$ $\qquad$ *R.* $[0]$

171 $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{4}{5}\sqrt{b}-\sqrt{a}+0{,}4\sqrt{b}$ $\qquad$ *R.* $[-\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{b}]$

172 $6\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-7\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+9\sqrt{b}+\sqrt{a}$ $\qquad$ *R.* $[9\sqrt{b}-\sqrt{ab}]$

173 $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$ $\qquad$ *R.* $[(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}]$

174 $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$ $\qquad$ $2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}$

175 $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+b}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{5}\sqrt{x}+0{,}4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$

176 $2a\sqrt{2a}-7a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$ $\qquad$ $3\sqrt{xy}+3\sqrt{x}-3\sqrt{y}+2\sqrt{xy}-3(\sqrt{x}+\sqrt{x})$

177 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$ $\qquad$ $(3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$

178 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ $\qquad$ $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$

179 $(\sqrt{3}+1)^2$ *R.* $[4+2\sqrt{3}]$ $\qquad$ $(\sqrt{3}-2)^2$ *R.* $[7+4\sqrt{3}]$

180 $(2+\sqrt{5})^2$ *R.* $[9+4\sqrt{5}]$ $\qquad$ $(4-\sqrt{3})^2$ *R.* $[19-8\sqrt{3}]$

181 $(6+2\sqrt{3})^2$ *R.* $[48+24\sqrt{3}]$ $\qquad$ $\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$ *R.* $[\frac{27}{4}-\sqrt{18}]$

182 $(\sqrt{2}-1)^2$ $\qquad$ $(2\sqrt{2}-1)^2$

183 $(\sqrt{3}+1)^2$ $\qquad$ $(\sqrt{3}-3)^2$

184 $(\sqrt{5}-2)^2$ $\qquad$ $(2\sqrt{5}+3)^2$

185 $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

186 $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$ $\qquad$ $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

187 $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$ $\qquad$ *R.* $[8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}]$

188 $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2$ $\qquad$ $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

189 $(\sqrt[3]{2}-1)^3$ $\qquad$ *R.* $[1+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}]$

190 $(\sqrt[3]{3}+1)^3$ $\qquad$ $(\sqrt[3]{2}-2)^3$

191 $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^3$ $\quad$ $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)$

192 $\left[\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\right]^2$ $\quad$ $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$

193 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ $\quad$ $3\sqrt{3}+\sqrt{3}:\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

194 $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{25}$ $\quad$ $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}\right)$

195 $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ $\quad$ $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$

196 $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ $\quad$ $\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$

197 $\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$

198 $\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{7}\right)^2$ $\quad$ $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)^2$

199 $\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ $\quad$ $\left(2x+\sqrt{x}\right)^2$

200 $\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^3$ $\quad$ $\left(2x+\sqrt{x}\right)\left(2x-\sqrt{x}\right)$

201 $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ $\quad$ $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{a}\right)$

202 $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ $\quad$ R. $[x-y]$

203 $\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(2\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$

204 $\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\right)-2\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)$

205 $\left(\sqrt{3}-3\right)^2+\left(\sqrt{3}-3\right)^3+2\sqrt{27}-\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-2\right)$

206 $\left(\sqrt{5}-2\right)^2-\left(2\sqrt{5}+3\right)^2+\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+1\right]\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

207 $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+1\right)^2-\sqrt{35}$

208 $\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

209 $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$

210 $\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

211 $\left(\sqrt{2}-1\right)^3+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\sqrt{2}-1$

212 $2\sqrt{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$

213 $\left(\sqrt{10}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{7}\right)$

214 $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$

215 $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$

216 $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}\right)$

217 $\sqrt{27ax^4}+5x^2\sqrt{75a}$

218 $\sqrt{125}+3\sqrt[6]{27}-\sqrt{45}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{20}+7\sqrt[8]{81}$

219 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[9]{a^8}$

220 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $\quad$ R. $[\sqrt[5]{b^7}]$

221 $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$

222 $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

223 $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

224 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$

225 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $\quad$ R. $\left[\sqrt{b}\right]$

226 $\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a-b}{2a+b}}$

227 $\sqrt{\frac{9a}{b}}\sqrt{\frac{b^2-2b}{3ab-6a}}$

228 $\sqrt{\frac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a+b}{3a-b}}$

229 $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}}$

230 $\sqrt[3]{\dfrac{a}{a+3}\sqrt{\dfrac{a}{a+3}\sqrt{\dfrac{a}{a+3}}}} : \sqrt{\dfrac{a}{a+3}}$ R. $\left[\sqrt[4]{\dfrac{a}{a+3}}\right]$

231 $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-31}}}} \cdot \sqrt[4]{x+1}$ R. $\left[\sqrt[8]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}\right]$

232 $\sqrt{\dfrac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{(a+1)^3}{(a-1)^2}}$ R. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{a-1}{(a+1)^3}}\right]$

233 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{b^2}} + \sqrt{\dfrac{ab^5+ab^4}{a}} - 2\sqrt{b+1} \cdot \dfrac{b^2}{(b+1)^2}\right)$ R. $\left[(b-1)^2\sqrt{b+1}\right]$

234 $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}} + \sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right) \cdot \sqrt[3]{y\sqrt[4x^2]{\dfrac{1}{y}}}$ R. $\left[2\sqrt[3]{y^2}\right]$

235 $\sqrt[4]{\dfrac{b^2-1}{b}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3b-3}{6b^2}} : \sqrt[6]{\dfrac{(b-1)^4}{4b^5}}$ R. $\left[\sqrt[12]{\dfrac{(b+1)^2}{b(b-1)}}\right]$

236 $\sqrt[3]{\dfrac{a^2+2a+1}{ab-b}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{a^2-2a+1}{ab+b}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}}$ R. $\left[\sqrt[4]{\dfrac{(a-1)^2}{2}}\right]$

237 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5x}{x^2+6x+9}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{5x}}$ R. $\left[\dfrac{x+y}{x+3}\right]$

238 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x}{x+1}} \cdot \sqrt[15]{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}} : \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ R. $\left[\sqrt[3]{x}\right]$

239 $\sqrt{\dfrac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}}+\sqrt{\dfrac{x^3+x^2}{y^3-y^2}}-x\sqrt{\dfrac{4x+4}{y^3-y^2}}$

240 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{y^4}+\dfrac{1}{y^3}} + \sqrt{\dfrac{xy^5+xy^4}{x}} - 2\sqrt{y+1}\right) : \dfrac{(y+1)^2}{y^2}$ R. $\left[(y-1)^2\ \sqrt{y+1}\right]$

241 $\sqrt[4]{\dfrac{a^2-a}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} : \sqrt[3]{\dfrac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\dfrac{1}{a-1}}$ R. $\left[\dfrac{a}{a+1}\sqrt[12]{\dfrac{a^2}{(a-1)^3}}\right]$

242 $\sqrt{\dfrac{a^2b+ab^2}{xy}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{(a+b)^2}{x^2}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{x^2y^3}{(a+b)^2}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}}$ R. $\left[\sqrt[24]{\dfrac{a^{10}b^{11}(a+b)^{11}}{x^{11}}}\right]$

243 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}+4x-4} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+4x+4} \cdot \sqrt{\dfrac{x}{4x^2-1}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\right]$

244 $\sqrt{\dfrac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}}$ R. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{a-1}{(a+1)^2}}\right]$

245 $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}-2+\dfrac{3}{a}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{9a^2(a+3)}{(a-3)^2}}\right) : \sqrt{\dfrac{a^2-9}{3a}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\dfrac{27a^3}{a-3}}\right]$

246 $\sqrt[4]{\dfrac{a^3-a^2}{(a+1)^3}} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\dfrac{1}{a-1}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\dfrac{1}{a(a+1)^2}}\right]$

247 $\sqrt{1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{4y^2}} : \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}} \cdot \sqrt{1-\dfrac{1}{4y^2}}\right)$ R. $\left[\sqrt{2y-1}\right]$

248 $\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{4a^2}} : \left(\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right)$ R. $\left[\sqrt[6]{4a^2(2a-1)}\right]$

249 $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}}+\sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}}-\sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}$ $R.\left[\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}\right]$

250 $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$ $R.\left[\frac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}\right]$

251 $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}}+\sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$ $R.\left[\frac{(1+2x)^2}{2x}\sqrt{x^2+xy+y^2}\right]$

252 $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}}+\sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}}-\sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$ $R.[\sqrt{a}]$

253 $\sqrt{4x-12y}+\sqrt{\frac{x^3-3x^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3y^3}{x^2}}$ $R.\left[\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3y}\right]$

254 $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}$ $R.[(1+a)^2]$

255 $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}$

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze per poi applicare le proprietà delle potenze:

<u>Esempi</u>

- $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[6]{a^5\cdot b}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a^2b}$
- $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^6b}}{a\sqrt[3]{b}}}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}}=$

  $=a^{\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{9}}=\sqrt[10]{a^3}\cdot\sqrt[9]{b^2}.$
- $\sqrt[6]{\frac{x^3\cdot\sqrt[3]{xy^2}}{x^2-\sqrt{xy}}}=\left(\frac{x^3\cdot(xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2-(xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{x^3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2-x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{x^{\frac{10}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{6}}=$

  $=\left[x^{\frac{17}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{17}{36}}\cdot y^{\frac{1}{9}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}$

256 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}:\sqrt{\frac{1}{a}}$ $R.\left[\sqrt{a^3}\right]$

257 $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}}:\sqrt[7]{a^4\sqrt{a}}$ $R.\left[\sqrt[14]{a^3}\right]$

258 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ $R.\left[\sqrt[9]{a^{19}}\right]$

259 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.[\sqrt{b}]$

►15. Razionalizzazione del denominatore di un frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformarla in una frazione equivalente avente a denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

I Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di fattore razionalizzante:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=3\frac{\sqrt{3}}{2\cdot3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}=\frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}}=\frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1}=\frac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1}=(a+1)\sqrt{a-1}$

II Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con n>m.

In questo caso il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. Infatti si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{(n-m)}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Se abbiamo un esercizio in cui la potenza del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$

  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[4]{x^3a^2b}$

  $\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}=\frac{ab\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{xa^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab}=\frac{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}{x}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{b^5}}=\frac{1}{b\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{b^2}$ con $b\neq0$.

III Caso: Razionalizzazione del denominatore delle frazioni $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Il fattore razionalizzante nel primo caso è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, nel secondo è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Sviluppiamo solo il primo caso, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Esempi

- $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{5^2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
- $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{9-2}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{7}$
- $\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}=\frac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{(1+\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a^2}}=\frac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a}$

IV Caso: Razionalizzazione del denominatore della frazione $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

Esempio

■ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ il fattore di razionalizzazione è $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2\cdot 6}$ portando fuori radice si ha $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

V Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Per razionalizzare un denominatore di questo tipo si utilizza il prodotto notevole

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ e quello analogo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

Razionalizza i seguenti radicali

260 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{5}{\sqrt{10}}$ $\frac{10}{\sqrt{5}}$

261 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\frac{4}{2\sqrt{2}}$ $\frac{3}{\sqrt{27}}$ $\frac{4}{\sqrt{8}}$

262 $-\frac{10}{5\sqrt{5}}$ $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ $-\frac{3}{4\sqrt{5}}$ $\frac{1}{\sqrt{50}}$

263 $\frac{9}{\sqrt{18}}$ $\frac{7}{\sqrt{48}}$ $\frac{3}{\sqrt{45}}$ $\frac{5}{\sqrt{125}}$

264 $\frac{6}{5\sqrt{120}}$ $\frac{1}{3\sqrt{20}}$ $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}$ $3\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$

265 $\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ $\frac{a}{\sqrt{a}}$ $\frac{x}{\sqrt{x}}$ $\frac{a x}{\sqrt{2 a}}$

266 $\frac{2a}{\sqrt{2}}$ $\frac{a}{2\sqrt{a}}$ $\frac{x}{3\sqrt{2x}}$ $\frac{x^2}{a\sqrt{x}}$

267 $\frac{3x}{\sqrt{12x}}$ $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

268 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

269 $\frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ $\frac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}$ $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ $\frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

270 $\frac{3a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

271 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$

272 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$

273 $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$ $\frac{6}{5\sqrt[3]{100}}$ $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ $\frac{3}{2\sqrt[6]{27}}$

274 $\frac{10}{\sqrt[5]{125}}$ $\frac{16}{\sqrt[3]{36}}$ $\frac{9}{\sqrt[4]{2025}}$ $\frac{1}{\sqrt[5]{144}}$

275 $\frac{a b}{\sqrt[3]{a^2 b}}$ $\frac{a b^2}{\sqrt[3]{a b^2}}$ $\frac{3a^2 b}{\sqrt[4]{9 a b^3}}$ $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27 a b^2 c^5}}$

276 $\frac{5x}{\sqrt[3]{x\sqrt{5}}}$ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16 a^2 b^3 c^4}}$ $\frac{\sqrt[3]{x^2 y}+\sqrt[3]{x y^2}}{\sqrt[3]{x y}}$ $\frac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9a}}$

277 $\frac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4a^2 x}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

278 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

279 $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\frac{3}{2+3\sqrt{3}}$ $\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

280 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{a b}}$ $\frac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}$ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}$

281 $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$ $\frac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$ $\frac{a-2}{\sqrt{a}-2}$ $\frac{a-x}{\sqrt{a}-2\sqrt{x}}$

282 $\frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$ $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\frac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$ $\frac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$

283 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{ab}}$ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$ $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$ $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$

284 $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ $\dfrac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$

285 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

286 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

►16. Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$
In alcuni casi i radicali doppi possono essere trasformati nella somma algebraica di due radicali semplici se l'espressione a^2-b è un quadrato perfetto mediante la seguente formula:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

- $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{49-40}}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-40}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+3}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-3}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-1}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$
  $=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
- $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+5}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-5}{2}}=\sqrt{6}+1$.
- $\sqrt{5+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{25-3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{25-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{22}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{22}}{2}}$ la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

287 $\sqrt{12-\sqrt{23}}$ $\sqrt{12+2\sqrt{5}}$ $\sqrt{15+\sqrt{29}}$ $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

288 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

289 $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ $\sqrt{6-\sqrt{11}}$

290 $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\sqrt{7-\sqrt{33}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

291 $\sqrt{7-\sqrt{13}}$ $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ $\sqrt{8-\sqrt{55}}$ $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

292 $\sqrt{8-\sqrt{39}}$ $\sqrt{8-4\sqrt{7}}$ $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

293 $\sqrt{\dfrac{15}{2}-\sqrt{\dfrac{86}{9}}}$ $\sqrt{\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}}$ $\sqrt{\dfrac{8}{5}-\sqrt{\dfrac{7}{4}}}$ $\sqrt{10+\sqrt{19}}$

►17. Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

Equazioni di primo grado

Esempi

■ $\sqrt{3}x=9$

$\sqrt{3}x=9 \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}} \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

■ $(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6}=2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1$

$\sqrt{3}x-x-\sqrt{6}=2x-3\cdot 2-\sqrt{2}+1$ $\quad\sqrt{3}x-x-2x=\sqrt{6}-6-\sqrt{2}+1$ $\quad\sqrt{3}x-3x=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

$x(\sqrt{3}-3)=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

■ $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}$

$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=\frac{\sqrt{18}-3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{-6}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{5}{6}\sqrt{3}+\frac{5}{2}$

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali

294 $\sqrt{2}x=2$ $\quad\sqrt{2}x=\sqrt{12}$ $\quad 2x=\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{14}$

295 $x-\sqrt{3}=2(x-\sqrt{3})$ $\quad R.[\sqrt{3}]$ $\quad 2\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ $\quad R.[\frac{\sqrt{6}}{3}]$

296 $2x+\sqrt{5}=\sqrt{5}x+2$ $\quad R.[1]$ $\quad(1+\sqrt{2})x=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ $\quad R.[4-3\sqrt{2}]$

297 $\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{8}}=x-\sqrt{2}$ $\quad R.[18-12\sqrt{2}]$ $\quad 2x-(x+\sqrt{3})\sqrt{2}x=2x+3\sqrt{5}$ *impossibile*

298 $\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{x-1}{2}$ $\quad R.[-(1+\sqrt{2})]$

299 $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=2$ *impossibile*

300 $(x+\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{3})^2=6$ $\quad R.\left[\frac{-7(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}\right]$

301 $\frac{x-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}-3x}{4}=2x$ $\quad R.\left[-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right]$

302 $2(x-1)^2-\sqrt{2}x=1+2x(x-2)$ $\quad R.\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

303 $\frac{\sqrt{3}}{3x-6}-\frac{1}{20-10x}=\sqrt{3}+2$ $\quad R.\left[\frac{36+17\sqrt{3}}{30}\right]$

304 $\frac{3x-2}{\sqrt{8}x-\sqrt{32}}+\frac{5x}{4\sqrt{3}x-8\sqrt{3}}=0$ $\quad R.\left[\frac{36-10\sqrt{6}}{29}\right]$

Disequazioni di primo grado

Esempio

- $(\sqrt{3}-1)x \le \sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-1)x \le \sqrt{3} \;\rightarrow\; x \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \;\rightarrow\; x \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \;\rightarrow\; x \le \frac{3+\sqrt{3}}{3-1} \;\rightarrow\; x \le \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali

305 $4x+\sqrt{2} < 2x-\sqrt{2}$ *R.* $[x<-\sqrt{2}]$

306 $(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2}x) < 3\sqrt{2}$ *R.* $\left[x>\frac{\sqrt{2}-6}{2}\right]$

307 $x\sqrt{2}+\sqrt{5} > \sqrt{10}$ *R.* $\left[x>\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}\right]$

308 $3(x-\sqrt{3}) < 2(x+\sqrt{3})-\sqrt{6}$ *R.* $[x<5\sqrt{3}-\sqrt{6}]$

309 $\frac{x-\sqrt{2}}{2} \le \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ *R.* $\left[x \ge \frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}\right]$

310 $\begin{cases} \sqrt{2}x \ge 2 \\ (3-\sqrt{2})x < \sqrt{2} \end{cases}$ *impossibile*

311 $\begin{cases} 2(x-\sqrt{2}) > 3x-\sqrt{3} \\ (x-\sqrt{2})^2 > (x-\sqrt{3})^2-\sqrt{3} \end{cases}$ *R.* $\left[\frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < x < \sqrt{3}-2\sqrt{2}\right]$

Sistemi di primo grado

Esempio

- $\begin{cases} x(2+\sqrt{2})+y=\sqrt{2}(2+x) \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases}$ risolviamolo con il metodo di sostituzione

$\begin{cases} 2x+\sqrt{2}x+y=2\sqrt{2}+\sqrt{2}x \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+\cancel{\sqrt{2}x}+y=2\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{2}x} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=2\sqrt{2}-y \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\sqrt{2}y+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\cancel{\sqrt{2}y}+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\sqrt{2}y} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y+2y}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ 2\sqrt{2}-y+2y=-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=2\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi a coefficienti irrazionali

312 $\begin{cases}\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y = 5\\ \sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\,y = 2\sqrt{6}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3}\right)$ $\begin{cases}x-\sqrt{3} = 2-y\\ x+2 = y+\sqrt{3}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{3};\ 2\right)$

313 $\begin{cases}x+2y = \sqrt{2}-1\\ 2x-2y = 2\sqrt{2}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -1\right)$ $\begin{cases}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{y}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{2x-y}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ R. $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}\right)$

314 $\begin{cases}x+\sqrt{3}\,y=2\\ \sqrt{3}\,x-4y=1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$ $\begin{cases}\sqrt{2}\,x-y=1\\ 2x+\sqrt{2}\,y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

315 $\begin{cases}4x-2\sqrt{5}\,y=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\,x+y=-2\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

316 $\begin{cases}\sqrt{3}\,x+4\sqrt{2}\,y=4\\ \sqrt{12}\,x+8\sqrt{2}\,y=8\end{cases}$ indeterminato

317 $\begin{cases}2x+3\sqrt{2}\,y=2\\ \sqrt{3}\,x-y=-\sqrt{8}\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

318 $\begin{cases}x+y=3\sqrt{5}\\ \sqrt{8}\,x+2\sqrt{2}\,y=-5\sqrt{11}\end{cases}$ impossibile

319 $\begin{cases}x-3\sqrt{3}\,y=\sqrt{27}\\ -\sqrt{3}\,x+\sqrt{243}\,y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

320 $\begin{cases}\sqrt{2}\,x+2y=4\\ 2x+\sqrt{32}\,y=-1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

321 $\begin{cases}x+\sqrt{3}\,y=2\\ \sqrt{3}\,x-4y=1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$

322 $\begin{cases}4x-2\sqrt{5}\,y=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\,x+y=-2\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

323 $\begin{cases}\sqrt{2}\,x-y=1\\ 2x+\sqrt{2}\,y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

324 $\begin{cases}2x+3\sqrt{2}\,y=2\\ \sqrt{3}\,x-y=-\sqrt{8}\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

325 $\begin{cases}\sqrt{3}\,x+4\sqrt{2}\,y=4\\ \sqrt{12}\,x+8\sqrt{2}\,y=8\end{cases}$ indeterminato

326 $\begin{cases}x-3\sqrt{3}\,y=\sqrt{27}\\ -\sqrt{3}\,x+\sqrt{243}\,y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

327 $\begin{cases}x+y=3\sqrt{5}\\ \sqrt{8}\,x+2\sqrt{2}\,y=-5\sqrt{11}\end{cases}$ impossibile

328 $\begin{cases}\sqrt{2}\,x+2y=4\\ 2x+\sqrt{32}\,y=-1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

►18. Esercizi di riepilogo

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se è Vera o Falsa.

329 É dato un quadrato di lato $3\sqrt{2}$.

a) Il suo perimetro è in numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero irrazionale V F

330 É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza 14.

a) Il suo perimetro è un numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero razionale V F
c) Il perimetro non esiste perché non si sommano numeri razionali con numeri irrazionali V F
d) La misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale V F

331 Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{13}$ cm.

a) L'ipotenusa ha come misura un numero razionale V F
b) Il perimetro è un numero irrazionale V F
c) L'area è un numero irrazionale V F

332 É dato un quadrato di lato $1+\sqrt{5}$

a) La misura della diagonale è in numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F

333 É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza $\sqrt{3}$.

a) Il perimetro è un numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F
c) La misura della diagonale è un numero irrazionale V F
d) Il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale V F

334 Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.

335 Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-5)^2}=-5$ è falsa?

336 Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni

a) La radice terza del triplo di *a* è uguale ad *a*. V F
b) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
c) Il doppio della radice quadrata di a è uguale alla radice quadrata del quadruplo di a. V F
d) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
e) La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. V F
f) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
g) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
h) Dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. V F
i) Sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. V F

337 Riscrivi in ordine crescente i radicali $\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3}$

338 Verifica che il numero irrazionale $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ appartiene all'intervallo (2; 3) e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

339 Sono assegnati i numeri $\alpha=\sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{30}+\sqrt{3})}+\sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17})\cdot(7\sqrt{2}-\sqrt{17})}$ e $\beta=(3+\sqrt{43})\cdot(3-\sqrt{5})-\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$, quali afffermazioni sono vere?

[A] sono entrambi irrazionali [B] solo α è irrazionale [C] α è minore di β
[D] α è maggiore di β [E] β è irrazionale negativo

340 Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali $l_1=\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{8}}\cdot\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{7}}\cdot\sqrt[3]{25}$ e $l_2=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot(\sqrt[8]{6})^3:\sqrt[4]{\sqrt{6}}$. Determinare la misura del perimetro e della diagonale del reattangolo.

341 Se x è positivo e diverso da 1, l'espressione $E=\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}-\frac{4}{\sqrt{x}+1}}:\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}+\frac{4}{\sqrt{x}+1}}$ è uguale a:

[A] $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ [B] $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$ [C] $\frac{1}{x}$ [D] $\sqrt[8]{x}$ [E] 0

342 Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie (a,b) di numeri reali positivi con a=3b, l'espressione $E=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a+b}{a-b}$ ha il numeratore doppio del denominatore.

343 *Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere*

a) $x+2\sqrt{3}$ per $x=\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}x+3\sqrt{6}$ per $x=\sqrt{3}$
c) x^2+x-1 per $x=\sqrt{2}$
d) $x^2+\sqrt{5}x-1$ per $x=\sqrt{5}$
e) $(x+2\sqrt{2})^2$ per $x=\sqrt{2}$

344 Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}}:\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1}$

Risolvi le equazioni

345 $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3x+3}{\sqrt{3}}$ $R.[-1]$

346 $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}}+\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=2$ $R.[2\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})]$

347 Per quale valore di *k* il sistema lineare è determinato?

$$\begin{cases} x\sqrt{3}+(k-\sqrt{3})y=1 \\ -2x+y\sqrt{6}=-k \end{cases}$$

348 L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<0$ è:

[A] $x\geq 0$ [B] $x\leq 0$ [C] $x>0$ [D] $x<0$ [E] sempre verificata.

349 Stabilire se esistono valori di a che rendono positiva l'espressione:

$$E=\frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}-1$$

350 Data la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) Determina il suo dominio,
b) Riscrivi la funzione razionalizzando il denominatore,
c) Calcola f(2),
d) Per quali valori di x si ha f(x)>0?
e) Risolvi l'equazione f(x)=0

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

2. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Stuartpilbrow, *225/365 Z is for Zzzzzzzzzz*
http://www.flickr.com/photos/stuartpilbrow/3326749916/

Indice

►1. Definizioni

DEFINIZIONI. Si dice **equazione di secondo grado**, un'equazione del tipo: $a\,x^2+b\,x+c\,=\,0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}\;\;e\;\;a\neq 0$. I valori *a, b, c* prendono il nome di **coefficienti** e, in particolare, *c* viene detto terzo coefficiente o **termine noto**. Un'equazione di secondo grado si definisce:
monomia quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli $a\,x^2\,=\,0$
incompleta pura quando il secondo coefficiente è nullo $a\,x^2+c\,=\,0$;
incompleta spuria quando il terzo coefficiente è nullo $a\,x^2+b\,x\,=\,0$;
completa quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero $a\,x^2+b\,x+c\,=\,0$.

►2. Risoluzione di un'equazione di secondo grado pura

Il coefficiente della *x* è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2+c\,=\,0$.
Si risolve ortando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di x^2:

$$a\,x^2+c=0\;\rightarrow\;a\,x^2\,=\,-c\;\rightarrow\;x^2\,=\,-\frac{c}{a}\;\rightarrow\;x_{1,2}\,=\,\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempi

- $4\,x^2-9\,=\,0$ risoluzione $4\,x^2\,=\,+9\;\rightarrow\;x^2\,=\,\frac{9}{4}\;\rightarrow\;x_{1,2}\,=\,\pm\sqrt{\frac{9}{4}}\;\rightarrow\;x_1\,=\,+\frac{3}{2}\;\vee\;x_2\,=\,-\frac{3}{2}$
- $4\,x^2+9\,=\,0$ risoluzione $4\,x^2+9\,=\,0\;\rightarrow\;x^2=-\frac{9}{4}$. L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale non è mai negativo.

In generale, le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2+c\,=\,0$ dipendono dal segno di $-\frac{c}{a}$:

- se -c/a>0, ovvero se *a* e *c* sono discordi, l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
- se -c/a<0, ovvero se *a* e *c* sono concordi, l'equazione **non ammette soluzioni reali;**
- se -c/a=0, allora $c\,=\,0$, l'equazione ha **due radici reali coincidenti nulle** $x_1\,=\,x_2\,=\,0$.

1	$x^2-1=0$	$x^2=\frac{49}{25}$	$2\,x^2-32=0$ R. $x_1=+4\vee x_2=-4$
2	$x^2-25=0$	$16\,x^2=1$	$3\,x^2+3=0$ R. $I.S.=\emptyset$
3	$x^2-9=0$	$25=9\,x^2$	$x^2-3=0$ R. $x_1=\sqrt{3}\vee x_2=-\sqrt{3}$
4	$x^2+36=0$	$4-x^2=0$	$x^2+4=0$ R. $I.S.=\emptyset$
5	$x^2=49$	$4-9\,x^2=0$	$5\,x^2-3=0$ R. $x_1=\frac{\pm\sqrt{15}}{5}$
6	$4\,x^2-9=0$	$9\,x^2-25=0$	$6\,x^2=0$
7	$2\,x^2-1=0$	$4\,x^2+16=0$	$1+x^2=50$
8	$3\,x^2-1=0$	$27\,x^2-3=0$	$7\,x^2=28$
9	$4\,x^2-4=0$	$5\,x^2-125=0$	$0{,}04\,x^2=1$
10	$x^2-0{,}01=0$	$0{,}5\,x^2-4{,}5=0$	$0{,}09\,x^2=0{,}01$
11	$\frac{1}{2}x^2-2=0$	$x^2-\frac{9}{4}=0$	$x^2-\frac{1}{6}=0$
12	$121\,x^2-\frac{1}{169}=0$	$x^2+\frac{9}{4}=0$	$4\left(x^2-\frac{3}{4}\right)=13$ R. $x_1=\pm 2$
13	$x^2-\sqrt{3}=0$	$-9\,x^2=-1$	$4\,x^2=-9$
14	$x^2+6=42$	$5-125\,x^2=0$	$18-x^2=0$
15	$(x+3)^2=6\,x+34$	$(x+1)^2=25$	$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=13$
16	$(x+\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}\,x$	$(x-2)^2+(1-x)^2=1-6x$	$(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})=0$

►3. Risoluzione di un'equazione incompleta spuria

Un'equazione incompleta spuria si presenta nella forma: $a x^2+b x = 0$.
Per risolverla, si raccoglie a fattore comune la *x*: $x(a x+b) = 0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene x=0 oppure ax+b=0 da cui $x=-\frac{b}{a}$.

Pertanto un'equazione di questo tipo ha sempre due soluzioni di cui una nulla.

Esempio

■ $2 x^2-4 x = 0$

Raccogliendo a fattor comune si ha: $2 x(x-2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue che $2x=0 \vee x-2=0$ da cui $x=0 \vee x=2$.

■ $x^2+x=0$

Si raccoglie x a fattore comune, si ha $x(x+1)=0$

per la legge di annullamento del prodotto $\begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$ le soluzioni sono $x=0 \vee x=-1$

17 $x^2-3x=0$ $\quad 3x^2-2x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$

18 $x^2-3x=0$ $\quad 7x^2+2x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=-\frac{2}{7}$

19 $x^2+2x=0$ $\quad x^2+5x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=-5$

20 $x^2-x=0$ $\quad 18x^2-36x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=2$

21 $2x^2+6x=0$ $\quad 1000x-2000x^2=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$

22 $9x^2+16x=0$ $\quad 6x^2=5x$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{6}$

23 $5x=25x^2$ $\quad 3x^2-2x=4x$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=2$

24 $81x^2=9x$ $\quad 0{,}1x^2-0{,}5x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=5$

25 $7x^2-2x=0$ $\quad 0{,}5x^2+0{,}1x=0$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=0{,}2$

26 $x^2+\frac{1}{2}x=0$ $\quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2=0$

27 $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x=0$ $\quad x^2+\sqrt{2}x=0$

28 $-2x^2+4x=0$ $\quad 5\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}x=0$

29 $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x=0$ $\quad 3x^2-\frac{4}{3}x=0$

30 $(x-2)^2=4$ $\quad (x+1)^2=1$

31 $(x+\sqrt{2})^2=2$ $\quad 77x-11x^2=0$

32 $\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x=0$ $\quad \frac{11}{3}x^2=-2x$

33 $\frac{1}{2}(x-2)^2-x=2$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

34 $(x-1)(x+3)=3x^2-3$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=1$

35 $(3x-2)^2-4=6x^2$ $\quad$ R. $x_1=0 \vee x_2=4$

36 $(x-2)^2+(1-x)^2=5$

37 $(x-2)^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

38 $(\sqrt{2}+x)^3-(\sqrt{3}+x)^3=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

39 $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2+(x-1)^2$

40 $(x^2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)+(2x+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$

►4. Risoluzione di un'equazione completa

Per risolvere l'equazione di secondo grado completa si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

$a x^2 + b x + c = 0$	
$4a^2 x^2 + 4abx + 4ac = 0$	si moltiplicano ambo i membri per *4a*
$4a^2 x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$	si aggiunge ad ambo i membri b^2
$4a^2 x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$	si porta *4ac* a secondo membro
$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$	il primo membro risulta il quadrato di un binomio
$k = 2ax+b$	sostituiamo il binomio *2ax+b* con la la variabile *k*
$k^2 = b^2 - 4ac$	l'equazione diventa un'equazione di secondo grado pura in k
$k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2-4ac}$	calcoliamo le soluzioni in *k*
$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$	al posto di *k* sostituiamo il binomio *2ax+b*
$2ax = -b \pm\sqrt{b^2-4ac}$	si separa il monomio con l'incognita
$x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	si risolve l'equazione di primo grado rispetto alla *x*

Si è soliti porre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Le soluzioni sono quindi date dalla formula: $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Δ prende il nome di **discriminante** dell'equazione. La parola discriminante deriva dal verbo *discrimen* (divisione); in effetti, il Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado.

Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \lor x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Secondo caso: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'equazione ammette **due radici reali e coincidenti** date dall'espressione: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

- Terzo caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'equazione **non ammette soluzioni reali**

Riassumendo e schematizzando si ha:

Equazione $a x^2 + bx + c = 0$ completa con $a \neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale $I.S. = \emptyset$

Esempi

- $3x^2-5x+2=0$

$a=+3,\ b=-5,\ c=+2;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-5)^2-4(+3)(+2)=25-24=1$ poiché $\Delta>0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte.

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{(+2)(+3)}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{5\pm1}{6}\ \rightarrow\ x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1\ \vee\ x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

- $4x^2-12x+9=0$

$a=+4,\ b=-12,\ c=+9;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-12)^2-4(+4)(+9)=144-144=0$

$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-12)}{2(+4)}=\frac{12}{8}\ \rightarrow\ x_1=x_2=\frac{3}{2}$

- $x^2-x+3=0$

$a=+1,\ b=-1,\ c=+3;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-1)^2-4(+1)(+3)=1-12<0$. Poiché il delta è negativo l'equazione non ha soluzioni reali.

Risolvi le seguenti equazioni complete

41 $x^2-5x+6=0$ R. $x_1=2\vee x_2=3$ — $x^2+x-20=0$ R. $x_1=-5\vee x_2=4$

42 $2x^2-6x-6=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ — $x^2-3x+6=0$ R. $I.S.=\emptyset$

43 $-x^2+x+42=0$ R.. $x_1=-6\vee x_2=7$ — $-x^2+10x-25=0$ R. $x_1=x_2=5$

44 $-2x^2+7x-5=0$ R. $x_1=1\vee x_2=\frac{5}{2}$ — $3x^2+2x-1=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{1}{3}$

45 $2x^2-\sqrt{5}x-1=0$ R. $x_1=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{13}}{4}$ — $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ R $x_1=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$

46 $x^2-3x-2=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ — $-2x^2+\sqrt{2}x+6=0$ R. $x_1=-\sqrt{2}\vee x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

47 $-\frac{4}{3}x^2-x+\frac{3}{2}=0$ R. $x_1=-\frac{3}{2}\vee x_2=\frac{3}{4}$ — $-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}=0$ R. $x_1=\frac{1}{8}\vee x_2=\frac{1}{2}$

48 $-x^2+4x-7=0$ R. $I.S.=\emptyset$ — $x^2-\sqrt{5}x-\sqrt{5}=0$ R $x_1=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$

49 $x^2-5x+3=0$ R. $x_1=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ — $x^2-4x+9=0$ R. $I.S.=\emptyset$

50 $x^2-4x-9=0$ R. $x_1=2\pm\sqrt{13}$ — $x^2+6x-2=0$ R. $x_1=-3\pm\sqrt{11}$

51 $x^2-3x-\frac{5}{2}=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{19}}{2}$ — $2x^2-3x+1=0$ R. $x_1=1\vee x_2=\frac{1}{2}$

52 $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{3}{4}$ — $3x^2+x-2=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{2}{3}$

53 $3x^2-\frac{2}{3}x-1=0$ R. $x_1=\frac{1\pm2\sqrt{7}}{9}$ — $\sqrt{2}x^2-x-3\sqrt{2}=0$ R. $x_1=-\sqrt{2};x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

54 $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$ R. $x=\sqrt{2}\vee x=\sqrt{3}$ — $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$ R. $x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{2}$

55 $(3x+1)^2-(2x+2)^2=0$ R. $x=-\frac{3}{5}\vee x=1$ — $(x+5)^2=5(4x+5)$ R. $x_1=0\vee x_2=10$

56 $(x-2)(3-2x)=x-2$ R. $x_1=1\vee x_2=2$ — $(x+200)^2+x+200=2$ R. $-199;-202$

57 $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=(x^2-1)^2$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$

►5. Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se nell'equazione $a x^2+b x+c = 0$ il coefficiente b è un numero pari, conviene applicare una formula, detta **formula ridotta**, che semplifica i calcoli.
Supponiamo $b = 2 k$, l'equazione $a x^2+b x+c = 0$ diventa $a x^2+2 k x+c = 0$ nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-2 k \pm \sqrt{(2 k)^2-4 a c}}{2 a} = \frac{-2 k \pm \sqrt{4 k^2-4 a c}}{2 a} = \frac{-2 k \pm \sqrt{4 (k^2-a c)}}{2 a} =$$

$$= \frac{-2 k \pm 2 \sqrt{k^2-a c}}{2 a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{k^2-a c}\right)}{2 a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-a c}}{a}$$

Dato che $b = 2 k$ quindi $k = \frac{b}{2}$ la formula ridotta che conviene utilizzare quando *b* è pari è:

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}}{a}$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche **discriminante ridotto**.

Vediamo qualche applicazione pratica della formula ridotta.

Esempi

- $x^2-4 x+3 = 0$

Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta :

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}}{a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-1(3)}}{1} = 2 \pm \sqrt{1} \quad \text{quindi} \quad x_1=1 \vee x_2=3 .$$

- $-x^2-2 x+24 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-(-1)(24)}}{-1} = -1 \pm \sqrt{25} \quad \text{quindi} \quad x_1=-6 \vee x_2=4$$

- $-3 x^2-6 x+12 = 0$

Dividendo l'equazione per -3 si, per il secondo principio di equivalenza, l'equazione equivalente $x^2+2 x-4 = 0$ Poiché il coefficiene della x è pari si può applicare la formula ridotta.

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2-1(-4)}}{1} = -1 \pm \sqrt{5} \quad \text{quindi} \quad x_1=-1+\sqrt{5} \vee x_2=-1-\sqrt{5}$$

Quando b è pari e a vale 1, la formula si dice **ridottissima** $x_{1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}$.

- $x^2-6 x+8=0$

$$x_{1,2}=\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a c}=3 \pm \sqrt{9-8}=3 \pm 1 \rightarrow x_1=2 ; x_2=4$$

Risolvi le seguenti equazioni, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

58 $3x^2-2x-2=0$ R. $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \vee x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

59 $x^2+6x-3=0$ R. $x_1=-3+2\sqrt{3} \vee x_2=-3-2\sqrt{3}$

60 $4x^2-8x+3=0$ R. $x_1=\frac{1}{2} \vee x_2=\frac{3}{2}$

61 $7x^2-2x-5=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{5}{7}$

62 $40x^2+80x-30=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{7}}{2} \vee x_2=\frac{-2-\sqrt{7}}{2}$

63 $5x^2-4x+1=0$ R. $I.S.=\emptyset$

64 $5x^2-4x-9=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{9}{5}$

65 $\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{4}=0$ R. $x_1=\frac{-4+\sqrt{34}}{6} \vee x_2=-\frac{4+\sqrt{34}}{6}$

66 $6x^2-4x-2=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

67 $90x^2-180x-270=0$ R. $x_1=3 \vee x_2=-1$

68 $\frac{3}{2}x^2-4x+2=0$ R. $x_1=2 \vee x_2=\frac{2}{3}$

69 $\frac{4}{3}x^2-6x+6=0$ R. $x_1=3 \vee x_2=\frac{3}{2}$

70 $x^2-6x+1=0$ R. $x_1=3+2\sqrt{2} \vee x_2=3-2\sqrt{2}$

71 $3x^2-12x-3=0$ R. $x_1=2+\sqrt{5} \vee x_2=2-\sqrt{5}$

72 $7x^2-6x+8=0$ R. $I.S.=\emptyset$

73 $3x^2-18x+27=0$ R. $x_1=x_2=3$

74 $9x^2+12x+1=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

75 $9x^2-12x+4=0$ R. $x_1=x_2=\frac{2}{3}$

76 $4x^2-32x+16=0$ R. $x_1=4+2\sqrt{3} \vee x_2=4-2\sqrt{3}$

77 $3x^2+10x+20=0$ R. $I.S.=\emptyset$

►6. Esercizi vari sulle equazioni di secondo grado

Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:

Equazioni incomplete			
Coefficienti	Nome	Equazione	Soluzioni
$b=0,\ c=0$	Monomia	$ax^2=0$	$x_1=x_2=0$
$b=0,\ c\neq 0$	Pura	$ax^2+c=0$	se a e c sono concordi $I.S.=\emptyset$ se a e c sono discordi $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$b\neq 0,\ c=0$	Spuria	$ax^2+bx=0$	$x_1=0 \vee x_2=-\frac{b}{a}$
Equazione completa $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$			
$\Delta>0$	Due soluzioni reali e distinte		$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\Delta=0$	Due soluzioni reali e coincidenti		$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	Nessuna soluzione reale		$I.S.=\emptyset$

Esercizi vari sulle equazioni di 2° grado

78 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)=2x-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{7}{6}$

79 $(3x-2)^2+(5x-1)^2=(3x-2)(5x-1)$ R. $\Delta<0$

80 $3x-x^2=x^2+3(x-2)$ R. $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$

81 $2(x-1)(x+1)=2$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

82 $(2x-1)(4-x)-11x=(1-x)^2$ R. $I.S.=\emptyset$

83 $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

84 $(x-3)^2=9-6x$ R. $x_1=x_2=0$

85 $(x-2)^3-1=x^3+12x-11$ R. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

86 $\frac{3x-2}{2}=x^2-2$ R. $x_1=2 \vee x_2=-\frac{1}{2}$

87 $(2x-3)(2x+3)=27$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=+\frac{3}{2}$

88 $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}=1+x$ R. $I.S.=\emptyset$

89 $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2=x$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{29}{27}$

90 $(x-2)^3-x^3=x^2-4$ R. $x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{7}$

91 $x(1-5x)=[3-(2+5x)]x-(x^2-1)$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

92 $(x+1)^3-(x+2)^2=\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$

93 $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{2x-5}{3}=-\frac{5}{3}x$ R. $I.S.=\emptyset$

94 $(x+2)^3+4x^2=(x-2)^3+16$ R. $x_1=x_2=0$

95 $(2-x)^3-(2-x)^2=\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

96 $3(x+\sqrt{2})^2-18(x+\sqrt{2})+27=0$ R. $x_1=x_2=3-\sqrt{2}$

97 $(4-3x)^3+27x^3=64+24x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{14}{9}$

98 $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2=(x+1)^2$ R. $x_1=-\frac{8}{5} \vee x_2=-\frac{4}{7}$

99 $(\sqrt{3}x+1)^2+(\sqrt{3}x-1)^2-3(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0$ $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

100 $\frac{(2x+1)(x-2)}{3}+\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{2}=\frac{(x-1)^2}{6}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{31}}{3}$

101 $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ $x=-2$

102 $(x-1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})(x-1)+\sqrt{15}=0$ $x=\sqrt{3}+1 \vee x=\sqrt{5}+1$

103 $\frac{(3x-1)^2}{3}-\frac{(1-2x)^2}{5}+\frac{3x(x-1)}{5}+\frac{(1+x)^2}{3}=0$ $\Delta=-\frac{1027}{225}$

104 $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$

105 $(3x-1)^2+(2x+1)^2=(3x-1)(2x+1)$ R. $I.S.=\emptyset$

106 $(x+1)^4-(x+1)^3=x^3(x+4)-x(x+1)^2+3x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{5}$

107 $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{3}{2}x^4$ R. $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{141}}{6}$

108 $\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{25}$

109 $(2-3x)^2-1=8(1-2x)+(2x+1)^2-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

110 $x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$ R. $x_1=-\sqrt{3} \vee +\sqrt{2}$

111 $\frac{2\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}-(x-\sqrt{3})^2=\frac{1-3\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}x(\sqrt{2}+2)$ R. $I.S.=\emptyset$

112 $\sqrt{3}(2x-30)^2-2\sqrt{27}(60-4x)=0$ R. $x_1=9\,;x_2=15$

113 $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ R. $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{2}{13}$

114 $\frac{x^2-16}{9}+\frac{(x-1)^2}{3}=\frac{x(x-2)}{9}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ R. $x_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{433}}{24}$

115 $\frac{(x-1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{3}=\frac{(x-3)(x+4)}{6}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

116 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}\right)x=-x^2+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}$ R. $x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10}}{54}$

117 $\frac{1}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{(x-2)(x+2)}{2}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}=0$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{331}}{14}$

118 $\frac{1}{2}(2x-1)(x+1)+\frac{1}{3}(x^2-5)+2x(x-1)(x+1)=2(x+2)^3-(2x-1)^2$ R. $x_{1,2}=\frac{-177\pm\sqrt{14849}}{80}$

119 $\frac{3x-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}-\frac{(x-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\frac{x^2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+2x-2\sqrt{3}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

120 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3x^2-7x+2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5x-13}{2}=\frac{2}{3}x(1-x)-\frac{73}{12}x+\frac{15}{12}$ R. $x_1=-6 \vee x_2=+6$

121 $\frac{(x^2+2x+1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x^4-1)}{8}-(2x^2-2x+1)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2(x^2+20)=0$ R. $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

Equazioni che si possono risolvere con opportune sostituzioni

Esempi

- $(x-1)^2=16$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2=16$, le cui soluzioni sono $t_1=-4\,;\,t_2=+4$. Per determinare la x sostituiamo i valori di t trovati nella relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=-4 \rightarrow x=-4+1=-3 \\ x-1=+4 \rightarrow x=+4+1=+5 \end{cases}$$

- $(x-1)^2+2(x-1)=0$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2+2t=0$ che si risolve mettondo t a fattore comune $t(t+2)=0 \rightarrow t_1=0 \vee t+2=0 \rightarrow t_2=-2$.

Sostituendo in $x-1=t$ si ha $\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=+1 \\ x-1=-2 \rightarrow x=-2+1=-1 \end{cases}$

Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni:

122 $(4x+3)^2=25$ R. $x_1=-2 \vee x_2=\frac{1}{2}$

123 $(x-5)^2+9=0$

124 $(3x-1)^2-36=0$

125 $4(2x+1)^2=36$

126 $(3x-5)^2-49=0$ R. $x_1=4 \vee x_2=-\frac{2}{3}$

127 $3(2x+5)^2-4(2x+5)=0$

128 $(3\cdot 10^3 x-10)^2-5(3\cdot 10^3 x-10)=-6$

129 $3(1-2x)^2-2(1-2x)-1=0$

130 $\frac{4}{3}(x-2)^2-6(x-2)+6=0$ R. $x_1=5 \vee x_2=\frac{7}{2}$

131 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

132 $2(x^2-1)^2+3(x^2-1)-5=0$

133 $3(34x-47)^2-2(34x-47)=1$ R. $x_1=\frac{24}{17} \vee x_2=\frac{70}{51}$

134 $(x-\sqrt{(2)})^2-(\sqrt{(2)}+1)(x-\sqrt{(2)})+\sqrt{(2)}=0$

►7. Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

DEFINIZIONE: Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Esempi

■ $\dfrac{3x+2}{1+x}=\dfrac{2x+3}{x-2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori: $m.c.m.=(1+x)\cdot(x-2)$

2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $C.E.\ x\neq -1 \wedge x\neq 2$
La ricerca dei valori che risolvono l'equazionesi restringe ai numeri reali appartenenti all'insieme, $D=R-\{-1,2\}=I.D.$ detto **D**ominio dell'equazione o **I**nsieme di **D**efinizione

3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\dfrac{3x+2}{1+x}-\dfrac{2x+3}{x-2}=0$.

Riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) $\dfrac{(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0$

4° passo: applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)=0$

5° passo: svolgendo i calcoli ci accorgiamo che l'equazione è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x+2x-4-2x-3-2x^2-3x=0 \rightarrow x^2-9x-7=0$

6° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=81+28=109$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{109}}{2} \rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{109}}{2} \vee x_2=\frac{9+\sqrt{109}}{2}$$

7° passo: confrontiamo le soluzioni con le **C.E.** ; in questo caso le radici appartengono all'insieme **D**; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\left\{\dfrac{9-\sqrt{109}}{2},\ \dfrac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$

■ $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo scomporre in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\dfrac{x^2}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$ il m.c.m. è $(x-2)(x-1)(x+2)$

2° passo: imponiamo le Condizioni di Esistenza: $C.E.\ x\neq 1 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2$ quindi $D=\mathbb{R}-\{1,2,-2\}=I.D.$.

3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione: $\dfrac{x^3+2x^2-x^2+3x-2-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8}{(x-2)(x-1)(x+1)}=0$

4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $3x^2+7x-10=0$

5° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=49+120=169$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm 13}{6} \rightarrow x_1=-\dfrac{10}{3} \vee x_2=1$

6° passo: confrontiamo con le C.E. ; in questo caso solo x_1 appartiene all'insieme D; diciamo che l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2=1$ non è accettabile.

*Determina l'**I**nsieme **S**oluzione delle seguenti equazioni frazionarie:*

135 $\frac{3}{x}-2=x$ R. $x_1=-3 \vee x_2=1$

136 $\frac{4-3x}{x}=\frac{3-2x}{x^2}$ R. $x_1=x_2=1$

137 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-1$ R. $I.S.=\emptyset$

138 $\frac{x}{2}=\frac{x+2}{x-2}+1$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

139 $\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-2$

140 $\frac{3x}{x^2-9}+\frac{x}{2x-6}=1$ R. $x_{1,2}=\frac{9\pm3\sqrt{17}}{2}$

141 $\frac{x+9}{x-3}=2-\frac{x-3}{x+9}$ R. $I.S.=\emptyset$

142 $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+2}$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$

143 $\frac{4x-3}{x^2-4}-\frac{3x}{x-2}=\frac{4}{2-x}-\frac{4x}{2+x}$ R. $x_1=1 \; ; \; x_2=5$

144 $\frac{3x+2}{2x^2-2x-12}-\frac{3-x}{4x-12}=-\frac{3}{x+2}$ R. $x_1=-19 \; ; \; x_2=2$

145 $\frac{2x+1}{x}=\frac{x}{2x+1}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

146 $\frac{4-x}{18-2x^2}+\frac{2}{3-x}=\frac{6x}{4x+12}$ impossibile

147 $\frac{6}{9x^2-12x+4}+\frac{1}{3x-\frac{1}{2}}=0$

148 $x-1-\frac{1}{x-1}=\frac{6}{6-6x}$ impossibile

149 $\frac{6x-6}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x-6}{x-3}=-2$ R. $x_1=-3 \; ; \; x_2=2$

150 $\frac{x-4}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-5x+6}-\frac{4-2x}{3-x}=0$ R. $x=-1$

151 $\frac{x-3}{x-1}-\frac{4}{3}+\frac{x-1}{x+1}=0$ R. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{10}$

152 $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2+x}{x^2+x}=0$ R. $x_1=x_2=-1$

153 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{3x-1}=10$

154 $\frac{x+1}{\sqrt{2}-x}=\frac{x-2}{x-2\sqrt{2}}$ R. $x_1=0 \, ; x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$

155 $\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{3x^2-3x}$ R. $x_1=-\frac{1}{2} \, ; x_2=4$

156 $\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{97}}{4}$

157 $\frac{2x}{x^2+2x-8}-\frac{2x+7}{x^2-3x-4}=0$ R. $x_1=-2 \; ; \; x_2=\frac{28}{17}$

158 $\frac{1-x}{x^2-4x+3}-\frac{4}{9-x^2}+\frac{x-3}{x^2+4x+3}=-\frac{5}{3-x}$ R. $x_1=-5 \; ; \; x_2=-\frac{1}{5}$

159 $\frac{4x-7}{x+2}+\frac{1-6x^2}{x^2-5x+6}=\frac{x}{2x^2-2x-12}-2$ impossibile

160 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{3}{(x-2)^3}$ R. $x_1=-1$; $x_2=3$

161 $\frac{1}{x+3}-\frac{5(x+2)}{(x+3)^2}=\frac{5x-1}{(x+3)^3}$ R. $x_1=-5$; $x_2=-1$

162 $\frac{3}{(3x-6)^2}-\frac{x^2-4}{(3x-6)^4}$ R. $x=\frac{28}{13}$

163 $\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{-7}{3x^2-21x+18}+\frac{2x}{x^2-3x+2}$ R. $x_1=-14$; $x_2=-1$

164 $\frac{5x-3}{x^2-5x}+\frac{2}{x}=\frac{3x}{x^2+3x}-\frac{2}{x+3}-\frac{4}{5-x}$ R. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{313}}{4}$

165 $\frac{x-9}{4x-x^2}-\frac{3x+2}{2-x}=\frac{x-5}{x+2}+\frac{2x^4+6x^3}{x(x-4)(x^2-4)}$ impossibile

166 $\frac{3(x+1)}{x-1}=1-\frac{2x-3}{x}$

167 $\frac{3-3x}{x^2-1}+\frac{8x}{2-2x}=0$ R. $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{8}$

168 $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{2x}{3x+8}+\frac{31}{3x^2-27}=\frac{1}{3}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=1$

169 $\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}=\frac{2x}{1-x}-\frac{2x}{1+x}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=\frac{1}{3}$

170 $\frac{x+1}{x-2\sqrt{3}}-\frac{1-x}{x+2\sqrt{3}}=\frac{x^2+8}{x^2-12}$ R. $x_1=\sqrt{6}-\sqrt{2} \vee x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

171 $\frac{2x+1}{1+x}+\frac{5}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}=0$

172 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2(3x-1)}{x^2}=5$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{1}{2}$

173 $\frac{(x-2)^2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x}{2x+2}$ R. $x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=3$

174 $-\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{-x+x^3}{x^2-4}$ R. $x_1=0 \vee x_2=3$

175 $\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{7}{4}$

176 $\frac{x+1}{x-2}-\frac{3x}{x+3}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=3$

177 È vero che in $\mathbb{R}$ $\frac{3}{1+x^2}=\frac{3}{x^4+2x^2+1}$ e $\frac{2x+14}{x^3-x^2+4x-4}-\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x^2+4}$ sono equivalenti?

178 Verifica che vale 1 il prodotto delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{1-x^3}+\frac{2x-2}{x^2+x+1}=0$.

179 Sull'asse reale rappresenta il **D**ominio e l'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione $\frac{x+2}{x}=2+\frac{x}{x+2}$.

180 Stabilisci se esiste qualche numero reale per cui la somma delle due frazioni $f_1=\frac{2-x}{x+2}$ *e* $f_2=\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a $\frac{9}{5}$.

181 L'espressione $E=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$ non assume mai il valore –1. VERO o FALSO?

►8. Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la:

DEFINIZIONE. Una equazione è letterale se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera x) compare un'altra lettera (in genere a, b, k, ….).

Esempi

■ $k x^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ *Discutere al variare di k la realtà delle soluzioni.*

Il parametro k può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro.
Notiamo subito che se k assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado, se k assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado incompleta (spuria) mancando del termine noto.
Discutere un'equazione letterale di secondo grado significa analizzare come varia il suo insieme delle soluzioni al variare del parametro.

Ricordando la formula $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti a, b, c

- il primo coefficiente è k, se $k=0$ l'equazione diventa $x-3=0$ di primo grado con $I.S.=\{3\}$;
- il secondo coefficiente è -2k+1, se è nullo, ossia se $k=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}=0$ equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-\sqrt{5}\vee x_2=\sqrt{5}$;
- il terzo coefficiente è k-3, se è nullo, cioè se $k=3$ l'equazione diventa $3x^2-5x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0\vee x_2=\frac{5}{3}$

Per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},3\right\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(-2k+1)^2-4k(k-3)=8k+1$, quindi

- se $8k+1<0 \rightarrow k<-\frac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$;
- se $8k+1\geq 0 \rightarrow k\geq-\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali:
  - distinte se $k>-\frac{1}{8} \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{(2k-1)\pm\sqrt{8k+1}}{2k}$
  - coincidenti se $k=-\frac{1}{8} \rightarrow x_1=x_2=5$

Riassumendo:

$kx^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ *con* $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=0$	$x=3$	Di primo grado
$k=\frac{1}{2}$	$x_1=-\sqrt{5}\vee x_2=+\sqrt{5}$	Pura
$k=3$	$x_1=0\vee x_2=\frac{5}{3}$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},3\right\}$		Completa: $\Delta=8k+1$
$k<-\frac{1}{8}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\frac{1}{8}$	$\Delta\geq 0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\frac{1}{8}$ reali distinte	$x_1=\dfrac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k}\vee x_2=\dfrac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$	
$k=-\frac{1}{8}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=5$	

■ *Discutere, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *la realtà delle radici dell'equazione* $x^2-3x+1-k=0$.

I primo e il secondo coefficiente non dipendono dal parametro *k*, quindi analizziamo il terzo coefficiente.
Se $k=1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1=0 \vee x_2=3$.
Per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=9-4(1-k)=4k+5$, quindi:

- se $k<-\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$
- se $k\geq-\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali
  - distinte se $k>-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_1=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$
  - coincidenti se $k=-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$

$x^2-3x+1-k=0$ *con* $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=1$	$x=3$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\{1\}$		Completa: $\Delta=4k+5$
$k<-\frac{5}{4}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\frac{5}{4}$	$\Delta\geq0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\frac{5}{4}$ reali distinte	$x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$	
$k=-\frac{5}{4}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=\frac{3}{2}$	

■ *Discutere la seguente equazione letterale:* $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$

L'equazione pur presentando delle frazioni è intera, in quanto l'incognita x non compare al denominatore.
Se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato, quindi ***C.E.*** $m\neq0 \wedge m\neq1$.

- Trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi:
  $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2mx}{m-1}\cdot\frac{1}{m}$;
- Semplifichiamo m nell'ultimo termine, poiché nelle C.E. $m\neq0$ $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2x}{m-1}=0$;
- Riduciamo allo stesso denominatore m-1, eliminiamo il denominatore essendo $m\neq1$ per le C.E.
  Si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$;
- Scriviamo l'equazione di secondo grado in forma canonica $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$

Discussione

- il primo coefficiente $a=1$ non dipende dal valore del parametro, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$;
- il secondo coefficiente $b=-2(m+1)$: se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2 \vee x_2=2$;
- il terzo coefficiente $c=m^2+2m-3$: se $c=m^2+2m-3=0 \rightarrow m=1 \vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C.E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=-4$.

Prima conclusione: per tutti i valori di *m* nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$; esso risulta indipendente dal valore del parametro e sempre positivo, quindi l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_1=m-1 \vee x_2=m+3$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ *con* $m\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$m=0 \lor m=1$		Priva di significato
$m=-1$	$x_1=-2 \lor x_2=2$	Pura
~~$m=1$~~ $\lor$ $m=-3$	$x_1=0;\ x_2=-4$	Spuria
$m\in\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$	$x_1=m-1 \lor x_2=m+3$	Completa: $\Delta=4$

■ *Discutere la seguente equazione parametrica:* $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$

L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita x.

- Trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$; *C.E.* $x\neq 0 \land x\neq k \land x\neq -k$
- Svolgiamo i calcoli nella parentesi e moltiplichiamo $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$;
- Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamo il denominatore $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2)=0$.
  - il primo coefficiente è k, se $k=0$ le C.E. si riducono a $x\neq 0$ e l'equazione diventa $0x=0$ indeterminata, quindi $I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita.
    Avendo studiato il caso k=0, possiamo ora suppore $k\neq 0$, dividiamo tutti i coefficienti per *k*, l'equazione diventa $x^2+x\cdot(1-k)+(k-2)=0$;
  - Il secondo coefficiente è 1-k, se $k=1$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \land x\neq 1 \land x\neq -1$ e l'equazione diventa $x^2-1=0$, le soluzioni sono $x_1=-1 \lor x_2=1$ che non sono accettabili per le C.E.
  - il terzo coefficiente è k-2, se $k=2$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \land x\neq 2 \land x\neq -2$ e l'equazione diventa $x^2-x=0$ le cui soluzioni sono $x_1=0 \lor x_2=1$ di cui $x_1=0$ non accettabile per le C.E.

Per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(1-k)^2-4(k-2)=(k-3)^2$; essendo $\Delta\geq 0\ \forall k$, si avranno sempre due soluzioni reali.

1. coincidenti se $k=3 \rightarrow x_1=x_2=1$ accettabili essendo le *C.E.* $x\neq -3 \land x\neq 0 \land x\neq 3$;
2. distinte se $k\neq 3 \rightarrow x_1=1 \lor x_2=k-2$ e confrontando con le C.E. si ottiene $x_1=1$ non accettabile se $k=-1$; x_2 sempre accettabile per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$.

$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$ *con* $k\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	Condizioni sull'incognita	Insieme Soluzione	Equazione
	$x\neq -k \land x\neq 0 \land x\neq k$		
$k=0$	$x\neq 0$	$I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$	indeterminata
$k=1$	$x\neq -1 \land x\neq 0 \land x\neq 1$	$x_1=-1 \lor x_2=1$ non accet.	pura
$k=2$	$x\neq -2 \land x\neq 0 \land x\neq 2$	$x_1=0 \lor x_2=1$ x_1 non accettabile	spuria
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$			Completa $\Delta=(k-3)^2$
$k=3$	$x\neq -3 \land x\neq 0 \land x\neq 3$	$x_1=x_2=1$ accettabili	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$	$x\neq -k \land x\neq 0 \land x\neq k$	$x_1=1 \lor x_2=k-2$	
$k=-1$		$x_1=1$ non accettabile	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$		$x_2=k-2$ accettabile	

Risolvi le seguenti equazioni letterali ed eventualmente discutile

182 $x^2-ax=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=a$

183 $ax^2-4a^3=0$ R. $a=0 \rightarrow \mathbb{R}$; $a\neq 0 \rightarrow x_1=-2a \vee x_2=2a$

184 $x^2+(x-a)^2=2ax$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}a \vee x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$

185 $(2x-a)x=ax$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

186 $x^2-ax-6a^2=0$ R. $x_1=-2a \vee x_2=3a$

187 $(a-3)x^2-ax+3=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{3}{a-3}$

188 $ax^2-a^2x+x^2+x-ax-a=0$ R. $x_1=a \vee x_2=-\frac{1}{a+1}$

189 $\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a}$

190 $\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq -1 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a+1}$

191 $\frac{2x}{3+kx}-\frac{x}{3-kx}=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{k}$

192 $\frac{m-n}{mn}x^2=\frac{2m^2n}{m^2-n^2}-\frac{mn}{m+n}$ R. $x_{1,2}=\frac{\pm m}{m-n}$

193 $\frac{mx-x^2}{m^2-3m+2}-\frac{x}{2-m}-\frac{m+1}{m-1}=0$ R. $x_1=m-2 \vee x_2=m+1$

194 $\frac{x^2+2tx}{t^2-tx}-2=\frac{3t}{t-x}+\frac{x+t}{t}$ R. $x=-3t$

195 $\frac{x-1}{k+1}-\frac{x^2+1}{k^2-1}=\frac{2k}{1-k^2}$ R. $x_1=-1$; $x_2=k$

196 $2\cdot\sqrt{m}-x=\frac{m-1}{x}$ R. $x_{1,2}=\sqrt{m}\pm 1$

197 E' vero che l'equazione $1-\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k-x}=0$ ammette due soluzioni reali coincidenti se $k=2$?

198 Nell'equazione $(a-1)\cdot(x+a)=\frac{x+a}{x-1}\cdot[x(a+1)-2a]$, dopo aver completato la discussione, stabilisci per quali valori di *a* le radici che si ottengono dall'equazione completa sono entrambe positive.

199 È vero chetiva la verità della proposizione. "l'equazione $3kx^2+(x-k)^2+2k(k+x)=0$ ammette radici reali opposte se $k<-\frac{1}{3}$ "

200 Per quali valori di *b* l'equazione $\frac{5x^2-4(b+1)}{b^2-4}-\frac{3x-1}{b+2}=\frac{3-2x}{2-b}-\frac{3x}{b^2-4}$ ha una soluzione negativa?

201 Per l'equazione $(x-k-1)^2=(k+1)\cdot(k-2x+x^2)$, completate le implicazioni:

$k=0 \rightarrow$ equazione ………….. $\rightarrow$ *I.S.*=…………………

$k=-1 \rightarrow$ equazione ………….. $\rightarrow x_1=$…………………

………… $\rightarrow$ equazione pura $\rightarrow$ due soluzioni reali ………… se …………$x_1=$……… $\vee$ $x_2=$………

202 Stabilisci per quali valori del parametro *m* l'equazione $\frac{m+2}{x-2}+mx=2$ ammette soluzioni reali distinte. Se $m=-2$ sono accettabili le radici reali trovate?

203 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $I.S.=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$.

204 Le soluzioni dell'equazione $(x+b)^2=(b+1)^2$ con $b\neq -1$ sono:

[A] $x_1=-1$; $x_2=1$ [B] $x_1=-2b-1$; $x_2=1$ [C] $x_1=x_2=1$ [D] $x_1=1-2b$; $x_2=1$

205 Per quali valori di k l'equazione $x^2-(2k+1)x+3k+1=0$ ammette soluzioni reali coincidenti?

►9. Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $a x^2+b x+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta \geq 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

- $x_1+x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1\cdot x_2 = \left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\dfrac{b^2-\Delta}{2a} = \dfrac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Quindi, la somma delle radici è $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ il prodotto delle radici è $x_1\cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Queste relazioni valgono anche nel caso in cui le radici siano coincidenti (Δ=0) e nel caso in cui le radici non siano reali (Δ<0).

Esempio

- *Determina le radici dell'equazione* $x^2+2x-15=0$ *senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.*

Calcolo il discriminante $\Delta=64$ pertanto le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\dfrac{b}{a}=-2$ e come prodotto $\dfrac{c}{a}=-15$. Le coppie di numeri che hanno per prodotto -15 sono -3 e +5, oppure +3 e -5, oppure +15 e -1, oppure -15 e +1. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma -2 è la coppia -5 e +3. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1=3 \vee x_2=-5$.

- *Determina la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione* $2x^2+11x-3=0$ *senza risolverla.*

Calcolo il discriminante $\Delta=145>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\dfrac{11}{2}$; $x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{2}$.

- *Data l'equazione* $x^2\sqrt{2}+3x-2\sqrt{2}=0$ *, determina, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Calcolo il discriminante $\Delta=25>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; $x_1\cdot x_2=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^2+2x+15=0$

Calcolo il discriminante $\Delta=-56<0$ le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precendeti precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-2$ e $x_1\cdot x_2=15$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^{21}-12x+36=0$

Il discriminate $\Delta=12^2-4\cdot 36=144-144=0$. Le radici sono coindidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1=x_2=6$. Applicando le formule per calcolare somma è prodotto si ha $x_1+x_2=12$ e $x_1\cdot x_2=36$ da cui si conclude ugualmente che $x_1=x_2=6$.

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici.*

$x_1-x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$ se $-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}>0 \rightarrow x_1>x_2$, se $-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}<0 \rightarrow x_1<x_2$

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.*

Si vuole cioè esprimere $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione.

Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1\neq 0 \wedge x_2\neq 0$ che implica $c\neq 0$. Si ha: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{c}$

206 Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei quadrati delle radici. Si vuole esprimere, attraverso i coefficiente *a*, *b*, *c* dell'equazione la quantità $x_1^2+x_2^2$. Si tenga presente la seguente identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

207 *Per ciascuna delle seguenti equazioni, completa la tabella sottostante:*

equazioni		discriminante	$I.S.\subset\mathbb{R}$?	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
a)	$5x^2+2x-1=0$	$\Delta=$			
b)	$-3x^2+1=0$	$\Delta=$			
c)	$6x^2+7x=0$	$\Delta=$			
d)	$-x^2+x-1=0$	$\Delta=$			
e)	$x^2+2x+1=0$	$\Delta=$			
f)	$2x^2-7x+1=0$	$\Delta=$			

Senza risolvere le equazioni determina somma e prodotto dello loro radici

208 $x^2+4ax+a=0$ $\qquad$ $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$

209 $2x^2+6kx+3k^2=0$ $\qquad$ $3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}x+2=0$

210 $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+4=0$ $\qquad$ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+1=0$

211 Dell'equazione $3\sqrt{2}x^2-5x+\sqrt{2}=0$ è nota la radice $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; senza risolvere l'equazione determinare l'altra radice.

212 Senza risolvere le equazioni stabilisci quale ha come soluzioni due numeri reali positivi e quale due numeri reali reciproci: $e_1:\ 5x^2+2x-1=0$; $e_2:\ -x^2+x-1=0$; $e_3:\ 2x^2-7x+1=0$

213 Un'equazione di secondo grado ha il primo coefficiente uguale a $-\frac{3}{2}$; sapendo che l'insieme soluzione è $I.S.=\left\{-\frac{3}{4};\sqrt{2}\right\}$ determinate i suoi coefficienti *b* e *c*.

214 Dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ la somma delle soluzioni è $\frac{21}{5}$ e una soluzione è $x_1=3{,}2$; determinate x_2 .

215 Determinate i coefficienti *a*, *b*, *c* di un'equazione di secondo grado sapendo che $x_1=1-\sqrt{2}$, il prodotto delle soluzioni è -1 e la somma del secondo con il terzo coefficiente è 9 .

216 Determinate i coefficienti b e c dell'equazione $x^2+bx+c=0$ sapendo che una radice è tripla dell'altra e la loro somma è 20.

217 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$.

Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $a x^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali x_1 e x_2 . Essendo $a\neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per *a*, ottenendo: $x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$. Dato che $s=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ si avrà $x^2-s x+p=0$.
Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "*determinare due numeri che sommati danno s e moltiplicati danno p.*"
Dall'equazione $x^2-s x+p=0$ discende che tali numeri esistono reali se e solo se $\Delta=s^2-4p\geq 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

Esempi

- *Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-12x+35=0$. Le soluzioni sono $x_1=5 \vee x_2=7$.

- *Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-5x+9=0$.
Poiché $\Delta=s^2-4p=25-36=-11$, l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri aventi la somma e il prodotto richiesti.

Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati

218 $S=3;\ P=5$ $\qquad$ $S=7;\ P=2$

219 $S=-3;\ P=-8$ $\qquad$ $S=-5;\ P=4$

220 $S=\frac{1}{2};\ P=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $S=\sqrt{2};\ P=2$

221 $S=\sqrt{7}-1;\ P=6$ $\qquad$ $S=a+1;\ P=a^2$

222 *Scrivi un'equazione di secondo grado che ammettte come radici le soluzioni indicate*

223 $x_1=-2;\ x_2=5$ $\qquad$ $x_1=7;\ x_2=2$

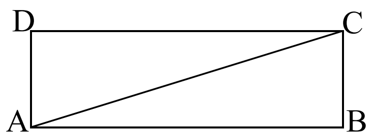
224 $x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{3}$

225 $x_1=\sqrt{2};x_2=\sqrt{5}$ $\qquad$ $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

Problemi di natura geometrica di secondo grado

Problema

Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80m. e l'area di 375m².
Dati: $2p=80$, $A=375\,(m^2)$
Obiettivo: $\overline{AC}$?
Soluzione



$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora sul triangolo *ABC*.
Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo
$\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ con $x>0$ e $y>0$

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases}x+y=40\\ x\cdot y=375\end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2-40t+375=0$ e precisamente $t_1=15 \vee t_2=25$.
Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $\overline{AB}=25\text{m}\,;\overline{BC}=15\text{m}$ da cui $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{850}\,m=5\sqrt{34}\,m$.

226 Determinate il perimetro del rombo avente $area=24\,(m^2)$, sapendo che la somma delle misure delle sue diagonali è $14\,(m)$.

227 Costruire i due triangoli isosceli aventi $area=120\,(m^2)$ sapendo che $31\,(m)$ è la somma delle misure della base con l'altezza.

228 Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AC* di $40\,cm$ e l'altezza *BH* ad essa relativa di *cm19*,2. Determinate la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

►10. Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $a x^2+b x+c$ e sia $a x^2+b x+c=0$ (con $\Delta\geq 0$) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

$$a x^2+b x+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]=$$

Si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo

$$= a[x^2-x_1 x+x_2 x+x_1\cdot x_2]=$$
$$= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] =$$
$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

Si effettua il raccoglimento parziale

È quindi possibile distinguere i casi:

- I caso: $\Delta>0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)(x-x_2)$;
- II caso: $\Delta=0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)^2$;
- II caso: $\Delta<0$ Il trinomio di secondo grado non può essere scomposto.

Discriminante	Scomposizione
$\Delta>0 \rightarrow x_1\neq x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0 \rightarrow x_1=x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)^2$
$\Delta<0 \rightarrow x_{1,} x_2\notin\mathbb{R}$	$a x^2+b x+c$ è irriducibile

Esempi

- *Scomporre in fattori* x^2-5x+6
  Applicando la formula ottenuta nel I caso si ha: $x^2-5x+6 = (x-2)(x+3)$
- *Scomporre in fattori* $x^2-12x+36$
  Applicando la formula ottenuta nel II caso si ha: $x^2-12x+36 = (x-6)^2$
- *Scomporre in fattori* $2x^2+3x+5$
  Essendo $\Delta = 9-40 = -31$, il trinomio è irriducibile.
- *Scomporre il trinomio* $-5x^2+2x+1$.

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:
$\Delta=(2)^2-4(-5)(+1)=4+20=24$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:
$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{-10}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$ quindi $x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$
3° passo: scrivo la scomposizione: $-5x^2+2x+1 = -5\left(x-\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$

- *Scomporre il trinomio* $6x^2+x-2$

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$: $\Delta=1^2-4(-12)=49$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$
$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{-1\pm 7}{12}$ quindi $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{1}{2}$
3° passo: scrivo la scomposizione: $6x^2+x-2 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (2x-1)(3x+2)$

■ *Scomporre il trinomio* $x^2-12x+36$

Il discriminante dell'equazione associata è $\Delta=12^2-4\cdot36=0$; le soluzioni sono coincidenti, precisamente $x_{1,2}=\frac{+12\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{12}{2}=6$ Il polinomio si scompone $x^2-12x+36=(x-6)(x-6)=(x-6)^2$. In questo caso si poteva riconoscer facilmente il quadrato del binomio.

Attenzione

Si vuole scomporre in fattori il trinomio $p=4x^2+2x-6$, avente tutti i coefficienti pari.
Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, NON POSSIAMO DIVIDERE PER DUE, non essendo una equazione; il polinomio $p=2x^2+x-3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione possiamo usare l'equazione $2x^2+x-3=0$ le cui radici sono: $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=1$, e procedere alla scomposizione del trinomio assegnato: $p=4x^2+2x-6=4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$

229 Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le soluzioni $x_1=\frac{1}{2}$ e $x_2=3$.

In virtù di quanto visto in questo paragrafo, si ha: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$ da cui: $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

cioè: $x^2+5x-\frac{3}{2}=0$ ovvero: $2x^2+5x-3=0$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado

230 $x^2-5x-14=0$ R. $(x+2)(x-7)$

231 $2x^2+6x-8=0$ R. $2(x-1)(x+4)$

232 $-3x^2+\frac{39}{2}x-9$ R. $-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-6)$

233 $-2x^2+7x+4$

234 $4x^2+4x-15$ R. $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

235 $3x^2+3x-6$

236 $4x^2-9x+2$ R. $4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

237 $2x^2+2x-\frac{3}{2}$

238 $3x^2+5x-2$ R. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$

239 $4x^2-24x+20$

240 $2x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$ R. $2(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

241 $\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{7}{2}$

242 $3x^2-6x-12$ R. $3(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

243 $2x^2-8x+2$

244 $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$ R. $-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

245 $-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{45}{8}$ R. $-\frac{3}{4}\left(x+3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

►11. Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

DEFINIZIONE. In un'equazione $a x^2 + b x + c = 0$, dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti *(a, b)* e (*b, c)* sono dette **coppie di coefficienti consecutivi.**
Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:
una **permanenza** se i coefficienti hanno lo stesso segno;
una **variazione** se i coefficienti hanno segni diversi.

Esempi

	a	b	c
$+2x^2-3x-1$	+	−	−
	variazione	permanenza	
$-x^2-3x-1$	−	−	−
	permanenza	permanenza	
$-3x^2+4x-1$	−	+	−
	variazione	variazione	
$+2x^2+x-1$	+	+	−
	permanenza	variazione	

TEOREMA DI CARTESIO. In un'equazione di secondo grado $a x^2 + b x + c = 0$ con $a, b, c \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia *(a,b)*, mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia *(b,c)*.

Cerchiamo di capire, attraverso degli esempi, perché i segni dei coefficienti dell'equazione di secondo grado completa hanno una stretta relazione con i segni delle sue soluzioni reali.

Esempio

L'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta = 16 > 0$ *; dal momento che vi è una sola variazione, quello della coppia (b,c), l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.*

Dimostriamo quanto è stato affermato tenendo presente che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; nell'equazione proposta si ha: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} \wedge x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{1}$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione è positiva e una è negativa. Chiamiamo x_1 la soluzione negativa e x_2 la soluzione positiva, poiché $x_1 + x_2 = -2 < 0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1| > |x_2|$. Riassumendo:

$x^2+2x-3=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	+	+	−	−	−	−	+
	permanenza	variazione					

Esempio

L'equazione $-x^2+5x-6=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=1>0$ *; dal momento che vi sono due variazioni, l'equazione ha due radici positive. Dimostra quanto è stato affermato completando la tabella e completando il ragionamento.*

$-x^2+5x-6=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	……	……	……	……	……	……	……
	………	………					

Essendo il prodotto ………… e la somma ………. le due soluzioni reali sono………………… pertanto 2 ……………. → 2 soluzioni …………..

Esempi

- L'equazione $2x^2-6x-56$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=484>0$; dal momento che vi è una sola variazione, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva dal momento che la variazione è nella coppia *(a,b)*.
- L'equazione $-3x^2-24x-21=0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=324>0$; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- L'equazione $x^2-10x+25=0$ ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta=0$; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

Determina il segno delle soluzioni di ogni equazione senza risolverla, dopo aver verificato che $\Delta \geq 0$

246 $x^2-5x+6 = 0$

247 $-x^2+x+42 = 0$

248 $x^2+x-20 = 0$

249 $3x^2+2x-1 = 0$

250 $2x^2-\sqrt{5}x-1 = 0$

251 $3x^2+5x+1=0$

252 $-x^2-x+1=0$

253 $-5x+1-x^2=0$

254 $-1-x^2-2x=0$

255 $1+x+2x^2=0$

256 $x^2-4\sqrt{2}x+2=0$

257 $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$

►12. Equazioni parametriche

DEFINIZIONE. Si definisce **parametrica** un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2+(k-1)x+(2-3k)=0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita x; i suoi coefficienti dipendono dal valore assegnato al parametro k e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da k.
In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche.
Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- si hanno soluzioni reali se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$;
  - reali coincidenti se $\Delta=b^2-4ac=0$,
  - reali distinte se $\Delta=b^2-4ac>0$
- la somma delle soluzioni è $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e il prodotto delle soluzioni è $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Nell'equazione precedente si ha $\Delta=(k-1)^2-12(2-3k)$ dipendente dal parametro k.

Dall'analisi del Δ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali;
Dall'analisi di somma e prodotto $x_1+x_2=-\frac{(k-1)}{3}$; $x_1\cdot x_2=\frac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno delle soluzioni reali.

258 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(2k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k

a) L'equazione si riduce al primo grado.
b) L'equazione ammette soluzioni reali; distinguere i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte".
c) La somma delle soluzioni sia nulla; determina in tal caso le soluzioni.

Svolgimento guidato

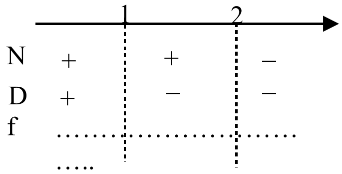
a) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente a si annulla $a=k+1 \rightarrow k=\ldots\ldots$; in questo caso si ha l'equazione ……………… di primo grado, da cui $x=\ldots\ldots\ldots$
b) studiamo il segno del discriminante: $\Delta=(2k+3)^2-4k(k+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0$ da cui ricaviamo
   - se $k=-\frac{9}{8}$ le soluzioni sono ……….. e $x_1=x_2=\ldots\ldots$
   - se $k>-\frac{9}{8}$ le soluzioni sono ……………… .
c) dalla formula ricaviamo $x_1+x_2=-\frac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi ponendo $(2k+3)=\ldots\ldots$ si ha somma nulla se $k=\ldots\ldots$; somma nulla equivale ad annullare il secondo coefficiente, quindi le soluzioni sono ……… ; in questo caso sono reali? Perché?

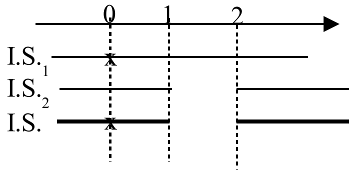
259 Assegnata l'equazione $(1-k)x^2+(k-2)x+1=0$, stabilire i valori da assegnare al parametro affinché le soluzioni reali distinte abbiano la somma positiva.

Svolgimento guidato

Nel testo del problema vi sono due richieste: a) le soluzioni siano reali distinte e b) abbiano somma positiva.

Il problema si formalizza attraverso il sistema $\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(k-2)^2-4(1-k)>0\\ -\frac{k-2}{1-k}>0\end{cases}$; risolviamo la prima disequazione: $d_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow k^2>0 \rightarrow I.S._1=\{k\in\mathbb{R}\,|\,k\neq 0\}$ e la seconda d_2 cercando il segno del numeratore e del denominatore: $\begin{cases}N:\ -k+2>0 \rightarrow k<2\\ D:\ 1-k>0 \rightarrow k<1\end{cases}$ da cui con la tabella dei segni ricaviamo $I.S._2=\{k\in\mathbb{R}\,|\,k\ldots\ldots\ldots \vee k>\ldots\ldots\ldots\}$.





Dal grafico ricava $I.S.=I.S._1 \cap I.S._2=\{k\in\mathbb{R} \mid k\ \ldots\ldots\ldots \vee\ 0<k<\ldots\ldots \vee\ k\ \ldots\ldots\ldots\}$

260 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k una sua soluzione è $x=-1$. In tale caso determinare l'altra soluzione.

Traccia di svolgimento

Ricordiamo che un valore numerico è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita trasforma l'equazione in una uguaglianza vera. Per questo motivo, sostituendo all'incognita il valore fissato, il parametro k dovrà verificare l'uguaglianza: $(k+1)(-1)^2+(k+3)(-1)+k=0 \ \rightarrow$ ....

Sostituendo il valore di k trovato, l'equazione diventa: $3x^2+5x+2=0$; l'altra soluzione può essere trovata o con la formula risolutiva, oppure ricordando che $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{5}{3} \rightarrow x_2=$ .... o anche

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3} \rightarrow x_2=$ ....

261 Giustificare la verità della seguente proposizione: "per qualunque valore assegnato al parametro m l'equazione $(m-1)^2+2mx+m+1=0$ ha soluzioni reali distinte".

Determinare m affinché: $a)\ x_1+x_2=1-\sqrt{3}$; $b)\ x_1\cdot x_2=\dfrac{12}{5}$; $c)\ x_1+x_2=1-x_1\cdot x_2$

262 Nell'equazione $7x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali; distingui i casi "reali coincidenti" e "reali distinte".

Nel primo caso determina $x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; nel secondo caso, determina k affinché

- Il prodotto delle soluzioni sia $-\dfrac{8}{3}$.
- Una soluzione sia nulla.
- Le soluzione siano una il reciproco dell'altra, cioè: $x_1=\dfrac{1}{x_2}$.
- La somma dei reciproci delle soluzioni sia $\dfrac{1}{2}$.
- La somma delle soluzioni superi il loro prodotto di 2.

263 Verificare che nell'equazione $(2m-3)x^2-(m+2)x+3m-2=0$ si hanno due valori del parametro per cui le soluzioni sono reali coincidenti. Determina i due valori.

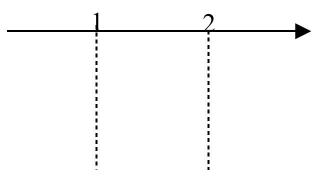
264 Nell'equazione $x^2-2(k+2)x+(k^2-3k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali, con somma positiva e prodotto negativo.

Traccia di svolgimento: Il problema richiede tre condizioni alle quali deve soddisfare contemporaneamente il parametro, pertanto si formalizza con il sistema $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4(k+2)^2-4(k^2-3k+2)\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots<0\end{cases}$; da cui

$d_1:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0 \ \rightarrow\ I.S._1=\ldots\ldots\ldots$

$d_2:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \ \rightarrow\ I.S._2=\ldots\ldots\ldots$

$d_3:\ (k-2)(k-1)<0$ da cui la tabella dei segni



e $I.S._3=\ldots\ldots\ldots$

265 $x^2-2x-k=0$ determinare k in modo che

- le soluzioni siano reali e distinte ($\Delta>0$) R. $[k>-1]$
- la somma delle soluzioni sia 10 $(x_1+x_2=10)$ impossibile
- il prodotto delle soluzioni sia 10 $(x_1\cdot x_2=10)$ R. $[k=-10]$
- una soluzione sia uguale a 0 (sostituire 0 alla x) R. $[k=0]$
- le radici siano opposte $(x_1+x_2=0)$ impossibile
- le radici siano reciproche $(x_1\cdot x_2=1)$ R. $[k=-1]$
- le radici siano coincidenti ($\Delta=0$) R. $[k=-1]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 12 $(x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12)$ R. $[k=4]$
- la somma dei reciproci delle radici sia -4 $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4\right)$ R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$
- la somma dei cubi delle radici sia 1

  $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1$ R. $\left[k=-\frac{7}{6}\right]$
- le radici siano entrambe negative $\begin{cases}x_1\cdot x_2>0\\x_1+x_2<0\end{cases}$ R. $k<0$

266 $x^2-kx-1=0$ determinare k in modo che

- le soluzioni siano coincidenti impossibile
- la somma delle radici sia 8 R. $[k=8]$
- le radici siano opposte R. $[k=0]$
- una radice sia $-\frac{1}{3}$ R. $\left[k=\frac{8}{3}\right]$
- Il prodotto delle radici sia -1 R. $[\forall k\in\mathbb{R}]$

267 $x^2+(k+1)x+k=0$ determinate k affinché

- una soluzione sia uguale a zero R. $[k=0]$
- abbia soluzioni opposte R. $[k=-1]$
- non abbia soluzioni reali impossibile
- le radici siano reciproche R. $[k=1]$
- Le radici siano positive (regola di Cartesio) R. [k<-1 o k>0]

268 $x^2-kx+6=0$ determinate k affinché

- la somma delle radici sia 7 R. $[k=7]$
- le radici siano reali e opposte impossibile
- la somma dei reciproci delle radici sia -6 R. $[k=-36]$
- una radice sia $-\frac{3}{2}$ R. $\left[k=-\frac{11}{2}\right]$

269 $x^2+(k+1)x+k^2=0$ determinare k affinché

- abbia come soluzione -1 R. $[k=0;1]$
- abbia una soluzione doppia ($x_1=x_2$) R. $\left[k=1;-\frac{1}{3}\right]$
- le radici siano reciproche R. $[k=\pm1]$
- una radice sia l'opposto della reciproca dell'altra impossibile
- una radice sia nulla R. [k=0]

270 $kx^2-2kx+k-2=0$ determinare k affinché

- una radice sia nulla R. $[k=2]$
- la somma dei reciproci delle radici sia 1 R. $[k=-2]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 4 R. $[k=2]$
- la somma delle radici superi di 5 il loro prodotto R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

271 $x(x-a)=\frac{a+x}{a+2}$ determinate a affinché

- una soluzione sia 1 R. $[a=-1\pm\sqrt{2}]$
- l'equazione sia di primo grado R. impossibile
- una soluzione sia uguale al reciproco dell'altra R. $[a=-1]$
- la somma delle soluzioni sia il doppio del loro prodotto R. $\left[\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}\right]$
- la somma dei quadrati delle soluzioni sia 0 R.impossibile
- la somma delle radici sia l'opposto del loro prodotto R. $\left[\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$
- le soluzioni siano reali e distinte
- l'equazione sia spuria
- la somma dei cubi delle soluzioni sia nulla
- le soluzioni siano reali e discordi
- la somma dei reciproci dei cubi sia 1

272 $kx^2-(2k+1)x+k-5=0$ determinare il valore di k per il quale

- l'equazione ha soluzioni reali R. $k\geq-\frac{1}{24}$
- il prodotto delle radici sia -2 R. $k=\frac{5}{3}$
- la somma delle radici sia 1 R. k=-1 non accettabile
- una soluzione sia -2 R. $k=\frac{1}{3}$
- le soluzioni siano opposte R. $k=-\frac{1}{2}$ non accettabile
- la somma dei reciproci sia 3 R. k=16
- le soluzioni siano reciproche impossibile
- una soluzione sia l'opposto del reciproco dell'altra
- la somma dei quadrati delle soluzioni sia 4 R. $k=\frac{(7\pm\sqrt{(51)})}{2}$
- le radici siano concordi R. $-\frac{1}{24}\leq k<0\vee k>5$
- le radici siano entrambe negative R. $-\frac{1}{2}<k<0$
- la somma delle radici uguagli l'opposto del loro prodotto

273 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $kx^2-x+k=0$ non ammette soluzioni reali?

274 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $x^2+(k-2)x+1=0$ ammette due soluzioni reali e distinte?

275 Per quale valore di *k* l'equazione $(k-1)x^2+kx+(k+1)=0$ ha una soluzione nulla?

[A] $k=1$ [B] $k=-1$ [C] $k=0$ [D] nessun valore di k

276 Per quale valore di *k* l'equazione $kx^2+\frac{1}{2}x+1=0$ ha due soluzioni identiche?

[A] $k=\frac{1}{4}$ [B] $k=\frac{1}{16}$ [C] $k=2$ [D] nessun valore di k

277 Per quale valore di *k* l'equazione $(k+3)x^2-2x+k=0$ ammette due soluzioni reciproche?

[A] $k=0$ [B] $k=-3$ [C] qualsiasi [D] nessun valore di k

278 Per quale valore di k l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2?

[A] k=4 [B] k=-2 [C] k=0 [D] k=-1

279 Se l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2 quanto vale l'altra soluzione?

[A] $x=0$ [B] $x=-2$ [C] $x=\frac{1}{2}$ [D] $x=2$

►13. Problemi di secondo grado in una incognita

La risoluzione dei problemi … serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito posto dalla situazione problematica.
Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita.
Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

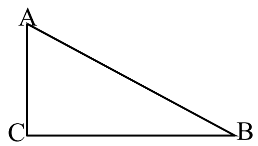
<u>Problema 1</u>

Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C l'ipotenusa supera il cateto maggiore CB di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area di ABC.

Dati   Obiettivo

$\overline{AB}=\overline{CB}+2$
$\overline{CB}-\overline{AC}=23$
$A\hat{C}B=retto$

? $2p$
? *Area*



Strategia risolutiva. Osserva che $2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$; $Area=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2}$

Poni $\overline{BC}=x$ dai dati si ha $\begin{array}{l}\overline{AB}=x+2\\ \overline{AC}=x-23\end{array}$ con $\begin{cases} x>0 & \text{essendo misura di un segmento}\\ x>23 & \text{poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva}\end{cases}$

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare:
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \rightarrow (x+2)^2=(x-23)^2+x^2$. L' equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2-50x+525=0$ con $\Delta=400$. L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1=15 \vee x_2=35$ entrambe positive. Ai fini del problema x_1 non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC}=35$; $\overline{AB}=37$; $\overline{AC}=12$
Conclusione: $2p=35+37+12=84\,(m)$; $Area=210\,(m^2)$

<u>Problema 2</u>

Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

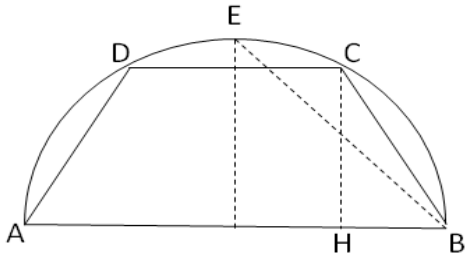
Indichiamo con p l'età attuale del padre e con f l'età del figlio
Dati: $p=f+26$; $p\cdot f=3f^2$ Obiettivo: ? f ; ? p
Strategia risolutiva: I dati permettono di impostare la relazione $(f+26)\cdot f=3\cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita f .
La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età.
Risolviamo: $2f^2-26f=0$ le cui soluzioni sono $f_1=0 \vee f_2=13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f=13$.
Risposta: Oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

<u>Problema 3</u>

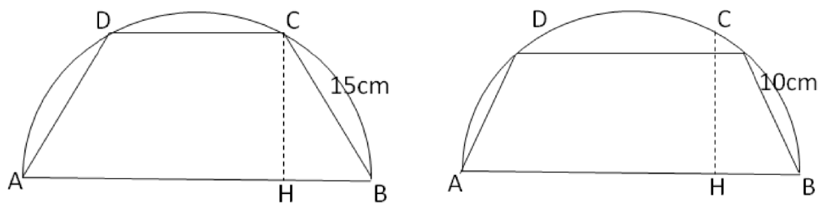
Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le

misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.

Dati	Obiettivo
$\overline{AB}=25$	
$2p=62$	$?\ \overline{DC}$
$\overline{AB}\parallel\overline{DC}$	$?\ \overline{CB}$
$\overline{AD}=\overline{CB}$	



Strategia risolutiva:
$\overline{AB}+\overline{DC}+2\ \overline{BC}=62$; fissiamo come incognita la misura in cm di BC: $\overline{BC}=x$
Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x>0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto C non deve coincidere con il punto medio E dell'arco DC, quindi $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$
Tracciata l'altezza $CH\ (H\in AB)$ si ha $\overline{DC}=\overline{AB}-2\ \overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo ACB , rettangolo in C , $\overline{HB}:\overline{CB}=\overline{CB}:\overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di HB in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB}=\frac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC}=25-\frac{2x^2}{25}$
Costruiamo l'equazione risolvente: $25+2x+25-\frac{2x^2}{25}=62 \rightarrow x^2-25x+150=0$ che ha soluzioni reali perché ……………… entrambe positive perché …………………………
Si ottiene $x_1=10 \vee x_2=15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti:



Problema 4

Un capitale di 25000 € viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 €. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Svolgimento. Assumiamo come variabile c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà c+0,05.
Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi $25000+25000\cdot c=25000(1+c)$. Nel secondo anno il tasso praticato è c+0,005 che va applicato alla somma 25000(1+c).
Si ottiene quindi l'equazione $25000(1+c)(1+c+0{,}005)=26291{,}10$
Risolvo l'equazione
$25000(1+c)(1{,}005+c)=26291{,}10$ moltiplicando tra le parentesi tonde si ha
$25000(1{,}005+c+1{,}005c+c^2)=26291{,}10$ dividendo per 25000 primo e secondo membro
$1{,}005+c+1{,}005c+c^2=\frac{26291{,}10}{25000}$ riscrivendo in ordine l'equazione si ha
$c^2+2{,}005c-0{,}046644$ applico la formula risolutiva
$c_{1,2}=\frac{-2{,}005\pm\sqrt{4{,}020025+0{,}186576}}{2}=\frac{-2{,}005\pm 2{,}051}{2}$ $c_1=-2{,}028$ $c_2=0{,}023$
La soluzione c_1 è negativa e non è accettabile.
La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e 2,8% il secondo anno.

280 Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata. [-2; 5/2]

281 Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà? [36; -37]

282 Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

283 Un numero addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trova il numero.

284 Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

285 Due numeri naturali hanno rapporto 2/3 e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà. [51, 34]

286 La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri?[16; 18]

287 Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è 9/20. Quali sono i due numeri? [4: 5]

288 Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli utlimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri? [17]

289 * La somma delle età di un padre con quella del figlio è 38. Sapendo che l'età del padre aumentata di 4 anni dà il quadrato dell'età del figlio, trovare le due età.

290 * Determina due numeri sapendo che la somma tra il doppio del minore ed il triplo del maggiore è 84 e che il rapporto tra la loro somma e il loro prodotto è 2/15.

291 * In una frazione il numeratore supera di 1 il doppio del denominatore. Determina la frazione sapendo che il numeratore e il denominatore sono numeri naturali e che essa è equivalente a un'altra frazione il cui numeratore supera di 4 il triplo del denominatore della prima frazione e il cui denominatore supera di 2 il denominatore della prima frazione. [5/2]

292 * Trova l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa. [23]

293 * Trova tre numeri che siano multipli interi consecutivi di 3 e tali che la somma del quadrato del minore con il prodotto degli altri due sia 414. [12; 15; 18]

294 * Trova due numeri positivi sapendo che il primo supera di 2 la terza parte del secondo e che il quadrato del primo supera di 4 la quinta parte del quadrato del secondo. [7; 15]

295 * Decomponi 15 in due parti in modo che la somma dei loro quadrati sia 113. [8; 7]

296 * In una frazione il numeratore e il denominatore hanno somma 10, mentre la somma dei loro quadrati è 58. Qual è la frazione? [3/7 e 7/3]

297 Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che perciò arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi. [15; 16]

298 Due navi che viaggiano su rotte perpendicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

299 Luca e Carlo bevono due aranciate in bottiglia. Nel tempo in cui Luca beve 11 sorsi, Carlo ne beve 8, ma due sorsi di Carlo equivalgono a tre di Luca. Poiché quando Carlo inizia a bere Luca ha già preso 4 sorsi, dopo quanti sorsi di Carlo le due bibite hanno lo stesso livello?

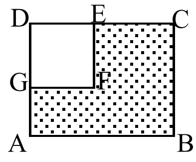
300 Un maratoneta durante una llenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciasscun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di 0,5 km/h rispetto al primo giro. A quali velocità a corso se ha impiegato complessivamente 2 ore e un quarto?

301 Un capitale di 1200 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse? [3,5%]

302 In un rettangolo, se si aumenta di 2 metri la base e si riduce di un metro l’altezza, la sua area aumenta di 4 metri quadrati. Se invece si riduce di un metro la base e si aumenta di 2 metri l’altezza, l’area aumenta di 22 metri quadrati. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

303 Una ditta spende mensilmente 73500 in stipendi per i propri dipendenti. Aumentando di 5 il numero dei dipendenti, ma riducendo l'orario di lavoro, diminuisce a ciascuno lo stipendio di 200 e spende solamente 2500 in più per gli stipendi. Quanti dipendenti aveva inizialmente la ditta e quanto guadagnava ognuno di essi? [35, 2100]

304 Da un cartoncino rettangolare (ABCD, come in figura) si vuole ritagliare un quadrato (DEFG) in modo che le due parti ottenute siano



equivalenti. Determinare la misura del lato del quadrato sapendo che $\overline{EC}=6\,cm$ e $\overline{AG}=4\,cm$. $[\overline{DE}=12\text{cm}]$

305 Un terreno a forma rettangolare di 6016m^2 viene recintato con un muro lungo 350m. Quali sono le dimensioni del rettangolo? [47; 128]

306 Determinare sul segmento AB di misura 5m un punto P tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2m. Rappresenta con un disegno le situazioni soluzione. [1cm; 4cm]

307 Calcolare perimetro e area del triangolo ABC isoscele sulla base AB sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è m.0,5 e tale è anche la differenza tra il lato CB e la base stessa. [2p=25m; A=30m^2]

308 La superficie del rettangolo ABCD supera di m^{2}119 la superficie del quadrato costruito sul lato minore AD. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i 7/10 del lato maggiore AB sono uguali ai 12/5 del lato minore. [2p=62m; d=25m]

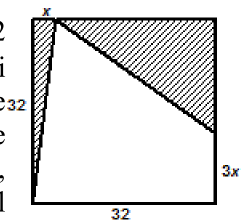
309 Nel trapezio rettangolo ABCD, il rapporto tra la base maggiore AB e la minore CD è 8/5, il lato obliquo forma con AB un angolo di 45°.Determinare il perimetro sapendo che l'area è 312 m^2. $[2\text{p}=64+12\sqrt{2}]$

310 Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di 24m^2 e il rapporto tra le diagonali 4/3. [40m]

311 Un rettangolo ABCD ha il perimetro di 48cm e l'area di 128cm^2. A una certa distanza *x* dal vertice A sui due lati AD e AB si prendono rispettivamente i punti P e Q. Alla stessa distanza x dal vertice C sui lati CB e CD si prendono rispettivamente i punti R e S. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo ABCD e l'area del quadrilatero PQRS è 32/23 calcola la distanza x. [6cm]

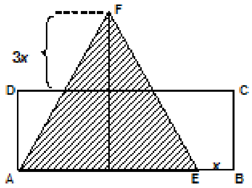
312 Un trapezio rettangolo ha la base minore di 9cm, l'altezza i 2/9 della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\,cm^2$. Determina la misura della base maggiore. $[3\sqrt{2}]$

313 Da un quadrato di 32 cm di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura dalla parte colorata. Calcola la misura di x, inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a 344 cm^2.



$$\left[\frac{32}{2}x+\frac{(32-x)(32-3x)}{2}=344 \;\rightarrow\; x=4\text{cm}\right]$$

314 Il rettangolo ABCD ha l'area di 240 cm2 e l'altezza AD di 12 cm. Si vuole trasformare il rettangolo in un triangolo AEF allungando l'altezza di una quantità 3x e accorciando la base di una quantità x (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo AEF che abbia l'area di 162 cm^2. [x=2; la soluzione x=14 non è accettabile]



315 Il rettangolo AEFG ha l'area di 768 cm^2 e l'altezza AG di 24 cm. Si vuole allungare l'altezza di una quantità x e accorciare la base di una quantità doppia 2x in modo da ottenere un secondo rettangolo ABCD che abbia l'area di 702 cm^2. Determina la quantità x. [3cm]

316 Il rettangolo ABCD ha l'area di 558 cm^2 e il lato DC di 18 cm. Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo AEFG accorciando l'altezza di una quantità 5x e allungando la base di una quantità 4x in modo che il nuovo rettangolo AEFG che abbia l'area di 228 cm^2. Determina la quantità x necessaria a compiere la trasformazione richiesta. [5]

317 Un trapezio isoscele di area 144cm^2 ha la base maggiore che supera di 10cm la base minore che a sua volta supera di 10cm l'altezza. Determina il perimetro del trapezio.

318 La piramide di Cheope è ha base quadrata ed ha una superficie totale pari a 135700 m^2. Sapendo che l'apotema della piramide è pari a 180 metri, si calcoli la lunghezza del lato di base. [230 m]

319 Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a 210 m^2. L'altezza è il doppio del lato di base diminuita di 2 metri. Trovare la lunghezza del lato di base. [5m]

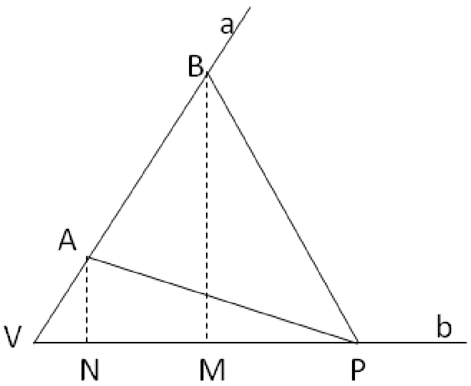
Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 98; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Problemi con un parametro

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sono sempre anche soluzioni del problema e d'altro canto può succedere che il problema abbia due soluzioni.
Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

Problema 1

Sul lato a *dell'angolo* $a\hat{V}b=60°$ *si fissano i punti A e B tali che* $\overline{VA}=2k$ e $\overline{VB}=8k$.
Determina sul lato b *un punto* P *in modo che il rapporto tra* PB *e* PA *sia 2.*

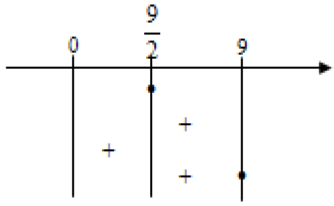
Dati	Obiettivo	Figura
$a\hat{V}b=60°$ $\overline{VA}=2k$ $\overline{VB}=8k$	$?\ P\in b$ tale che $\dfrac{PB}{PA}=2$	

Osservazione preliminare: le misure dei segmenti *VA* e *VB* sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k>0$.
Strategia risolutiva:
La posizione del punto *P* sul lato *b* sarà individuata dalla distanza di *P* da *V*: poniamo quindi $\overline{VP}=x$ con $x>0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di *x* per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.
Sia *M* il piede della perpendicolare da *B* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PMB* si ha $\overline{PB}^2=\overline{BM}^2+\overline{PM}^2$ (*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *BVM*, rettangolo in *M* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BV}\cdot\sqrt{3}=4k\cdot\sqrt{3}$ *;* $\overline{PM}=\overline{VP}-\overline{VM}$ e $\overline{VM}=\frac{1}{2}\overline{VB}=4k$; per quanto detto sul triangolo *BVM*, quindi $\overline{PM}=x-4k$; sostituendo in (*) si ottiene $\overline{PB}^2=48k^2+(x-4k)^2$.
Sia *N* il piede della perpendicolare da *A* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PNA*. Con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2=\overline{AN}^2+\overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *AVN*, rettangolo in *N* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AV}\cdot\sqrt{3}=k\cdot\sqrt{3}$ e $\overline{VN}=\frac{1}{2}\overline{AV}=k$ *;* $\overline{PN}=\overline{VP}-\overline{VN}=x-k$; sostituendo in (**) si ottiene $\overline{PA}^2=3k^2+(x-k)^2$.
Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}=4$. Sostituendo quanto trovato si ha l'equazione $48k^2+(x-4k)^2=4\cdot\left[3k^2+(x-k)^2\right]$ da cui $x^2=16k^2$. Si tratta di un'equazione di secondo grado pura, avente due soluzioni reali opposte essendo il secondo membro positivo, quindi $x_1=-4k\ \vee\ +4k$ e per le condizioni poste solo x_2 è accettabile.
Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto P che risolve il problema?

320 Sul prolungamento dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* del quadrato *ABCD* prendi rispettivamente i punti *Q*, *R*, *S*, *P* in modo che *QB=RC=SD=PA*. Dimostra che *PQRS* è un quadrato; nell'ipotesi che sia $\overline{AB}=3\text{m}$ determina $\overline{AP}$ in modo che l'area di *PQRS* sia *k*, con *k* reale positivo.

Traccia dello svolgimento

Per dimostrare che PQRS è un quadrato dobbiamo dimostrare che i lati sono …………………… e che gli angoli sono ………



Ipotesi: ……………………

Tesi: …………………..

Poni $\overline{AP}=x$ con $x>0$

$Area_{PQRS}=\overline{PQ}^2=\overline{PA}^2+\overline{AQ}^2$ per il teorema di Pitagora in ……….

Verifica che si ottiene l'equazione risolvente $2x^2+6x+(9-k)=0$.

Poiché vogliamo soluzioni reali positive, discuti l'equazione con il metodo di Cartesio. Il discriminante è … … Verifica che l'equazione ammette soluzioni reali per $k\geq\frac{9}{2}$. Analizza il segno dei coefficienti e completa il grafico.

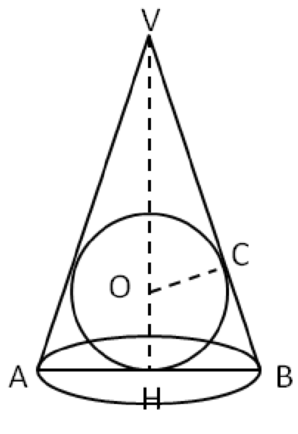
321 Nel trapezio rettangolo ABCD di base maggiore BC, la diagonale AC è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$. Posto $\overline{AB}=1m$, determina la base maggiore in modo che sia 2k il perimetro del trapezio.

Disegna la figura, i dati e l'obiettivo del problema.

Traccia dello svolgimento

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati omologhi sono in proporzione. Poniamo $\overline{BC}=x$ con x……… . Dall'informazione che la diagonale *AC* è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$, possiamo dimostrare che *ADC* è un triangolo isoscele sulla base AC. L'equazione risolvente sarà determinata dalla relazione tra i lati che esprime il perimetro del trapezio: $2p=\overline{AC}+\overline{BC}+$………..$=2k$. Dobbiamo quindi esprimere $\overline{DC}$ in funzione di *x*. Traccia l'altezza *DH* del triangolo isoscele *ADC* e dopo aver dimostrato la similitudine di *ABC* con *DHC*, verifica che si ottiene $\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BC}$ da cui si può ricavare la misura di DC. Per completare gli elementi nell'equazione risolvente, calcola $\overline{AC}^2$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABC.* L'equazione parametrica risolvente è $2x^2+x\cdot(1-2k)+1=0$ con $x>0$; può essere discussa con il metodo di Cartesio.

322 Ad una sfera di raggio *1m* è circoscritto un cono il cui volume è *k* volte il volume della sfera. Determina l'altezza del cono.

Dati	Obiettivo	Figura
$\overline{OC}=1$ $\overline{OC}=\overline{OH}$ $\overline{OC}\perp\overline{VB}$ $\overline{BC}=\overline{BH}$ $\overline{AH}=\overline{HB}$ $\overline{VH}\perp\overline{AB}$ $Volume_{cono}=k\cdot Volume_{sfera}$	? $\overline{VH}$	

Poniamo $\overline{VO}=x$ con $x>0$ da cui $\overline{VH}=\overline{VO}+\overline{OH}=x+1$.

Ricordiamo che $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HB}^2\cdot\overline{VH}$ e $V_{sfera}=\frac{4}{3}\pi\,\overline{CO}^3$. Per impostare l'equazione risolvente dobbiamo cercare di esprimere $\overline{HB}^2$ in funzione di *x*. Verifica che dalla similitudine di *VOC* con *VHB* si deduce: $\overline{HB}:\overline{OC}=\overline{VH}:\overline{VC}$ quindi $\overline{HB}=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{VH}}{\overline{VC}}$; dobbiamo ancora ricavare $\overline{VC}$ che per il teorema di Pitagora su *VCO* è … Sostituendo tutti gli elementi trovati nella relazione che lega il volume del cono con il volume della sfera, verifica che si ottiene $x^2+2x(1-2k)+4k=0$ con $x>0$, da discutere con il metodo di Cartesio.

323 Il quadrilatero *ABCD* ha le diagonali perpendicolari ed è inscritto in una circonferenza; sapendo che $\overline{AB}=5a\,;\ \overline{AE}=3a\,;\ 2p_{BCA}=\frac{5}{2}\cdot\overline{BD}$, essendo *E* punto d'incontro delle diagonali, determinate la misura delle diagonali. [Poni $\overline{CE}=x$, analizza la posizione del punto *E* sulla diagonale *BD*.]

324 Il rettangolo *ABCD* ha i lati *AB* e *BC* che misurano rispettivamente *a* e *3a* (*a>0*). Prolunga il lato *AB* di due segmenti congruenti *BN* e *AM* e sia *V* il punto di intersezione delle retta *MD* e *CN*. Posto $\overline{BN}=x$, determina la misura della base *MN* del triangolo *MVN* in modo che la sua area sia *k* volte l'area del rettangolo assegnato.

325 Due numeri reali hanno come somma *a* $(a\in\mathbb{R}_0)$; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia *k* $(k\in\mathbb{R}_0)$. Quale condizione si deve porre sull'incognita? Per quale valore del parametro i due numeri soluzione sono uguali?

326 In un triangolo rettangolo l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC* misura *1m* e $A\hat{B}C=60°$. Determinare sulla semiretta *AH*, esternamente al triangolo un punto *P* in modo che sia *k* la somma dei quadrati delle distanze di *P* dai vertici del triangolo. Quale condizione va imposta al parametro *k* perché il problema abbia significato?

327 $\overline{AB}=16a\,;\ \overline{BC}=2a\sqrt{14}$ rappresentano le misure dei lati del rettangolo *ABCD*; determinare un punto *P* del segmento *AB* tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici *C* e *D* sia uguale al quadrato della diagonale *DB*. Posto $\overline{AP}=x$ quale delle seguenti condizioni deve rispettare la soluzione? $A]\ x>0\,;\quad B]\ 0<x<16a\,;\quad C]\ x<16a$. Dopo aver risolto il problema spiegate il significato delle soluzioni ottenute.

Sheda di ripasso sulle equazioni

1. L'equazione $25x^2+1=0$ ha per soluzioni

[A] $x=\pm 5$ [B] $x=\pm\frac{1}{5}$ [C] x=-5 e x=0 [D] non ha soluzioni reali

2. L'equazione $16x^2+x=0$ ha per soluzioni

[A] $x=4 \vee x=1$ [B] $x=\pm\frac{1}{4}$ [C] $x=-\frac{1}{16} \vee x=0$ [D] non ha soluzioni reali

3. L'equazione $4x^2-9x=0$ ha per soluzioni

[A] $x=\pm\frac{3}{2}$ [B] $x=\pm\frac{9}{4}$ [C] $x=\frac{3}{2} \vee x=0$ [D] $x=\frac{9}{4} \vee x=0$

4. L'equazione $9x^2+6x+1=0$ ha per soluzioni

[A] $x=\pm 3$ [B] $x=\pm\frac{1}{3}$ [C] $x=-\frac{1}{3}$ doppia [D] non ha soluzioni reali

5. L'equazione $x^2-6x+36=0$ ha per soluzioni

[A] $x=\pm 6$ [B] $x=\pm\sqrt{6}$ [C] $x=6$ doppia [D] non ha soluzioni reali

6. Quale di queste equazioni ammette una soluzione doppia x=3?

[A] $x^2+6x+9=0$ [B] $9-x^2=0$ [C] $2x^2-12x+18=0$ [D] $3x^2+9x=0$

7. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono $x_1=1$ e $x_2=3$. L'equazione è pertanto:

[A] $x^2+x-1=0$ [B] $x^2-4x+3=0$ [C] $x^2-4x-3=0$ [D] $x^2+4x-3=0$

8. Il polinomio x^2+5x+6 può essere scomposto in:

[A] $(x+2)(x-3)$ [B] $(x+5)(x+1)$ [C] $(x-2)(x-3)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

9. Una delle soluzioni dell'equazione $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ è $\sqrt{2}$, quanto vale l'altra?

[A] $-\sqrt{2}$ [B] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [C] $\sqrt{2}+1$ [D] 1

10. Per quale valore di *k* l'equazione $(2k-1)x^2+(2k+1)x+k-2=0$ diventa di I grado?

[A] $k=\frac{1}{2}$ [B] $k=-\frac{1}{2}$ [C] $k=2$ [D] $k=0$

11. L'equazione $4m^2x^2-5mx+1=0$ con parametro *m* ha per soluzioni

[A] $x=m \vee x=4m$ [B] $x=\frac{1}{m} \vee x=\frac{1}{4m}$ [C] $x=64m \vee x=1$ [D] $x=m \vee x=\frac{1}{4}$

12. L'equazione di secondo grado $x^2+(a+1)x+a=0$ con *a* parametro reale ha come soluzioni:

[A] $x=1 \vee x=a$ [B] $x=a-1 \vee x=1$ [C] $x=-a \vee x=-1$ [D] $x=a+1 \vee x=a$

13. L'equazione $x^2+(t-2)=0$ con *t* parametro reale ammette soluzioni reali

[A] per $t\leq 2$ [B] per $t\geq 2$ [C] per $t<2$ [D] nessuna delle risposte precedenti

14. Quanto vale il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2-6a^2x+8a^4=0$?

[A] $8a^4$ [B] $8a^2$ [C] $6a^2$ [D] non esiste

15. Il polinomio $x^2+(m-2)x-2m$ con *m* parametro reale può essere scomposto in:

[A] $(x+m)(x+1)$ [B] $(x+m)(x-2)$ [C] $(x+m)(x+2)$ [D] $(x-m)(x-2)$

16. L'equazione $x^2+(k-1)x=0$ con *k* parametro reale:

[A] non ha soluzioni reali
[B] ha una soluzione uguale a zero
[C] ha due soluzioni reali coincidenti per k=0
[D] ha soluzioni reali e distinte per k=1

17. L'equazione $x^2+2x+k-2=0$ con *k* parametro reale:

[A] ha due soluzioni reali coincidenti per k=3
[B] ha due soluzioni reali coincidenti per k=1
[C] ha una soluzione nulla per k=-2
[D] ha soluzioni reali e distinte per $k\neq 3$

18. L'equazione $x^2+m^2+1=0$ con *m* parametro reale:

[A] ammette due soluzioni reali e opposte
[B] ammette due soluzioni coincidenti
[C] non ammette soluzioni reali
[D] ammette due soluzioni negative

19. L'equazione $2x^2+k^2=0$ con *k* parametro reale:

[A] ammette due soluzioni reali e distinte
[B] ammette due soluzioni reali solo se *k* è positivo
[C] ammette soluzioni coincidenti per *k=0*
[D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

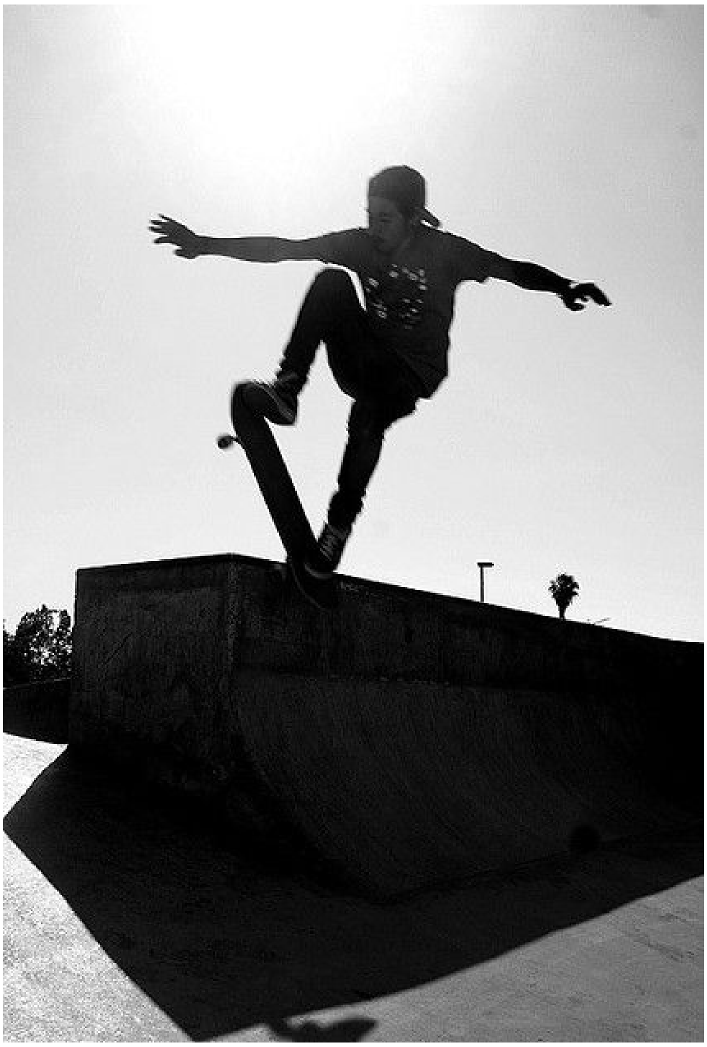
20. L'equazione $tx^2-1=0$

[A] ha come soluzioni $x_1=0$ e $x_2=1-t$
[B] ammette sempre soluzioni reali
[C] ammette soluzioni reali per t>0
[D] ha come soluzioni $x=\pm t$

1.D-2.C-3.D-4.C-5.D-6.A-7.B-8.D-9.D-10.A-11.B-12.C-13.A-14.A-15.B-16.B-17.A-18.C-19.C-20.C

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO



Alvaro Tapia, *Skateboard*
http://www.flickr.com/photos/foto_saiker/3087292011/

Indice

►1. L'equazione di terzo grado, un po' di storia

Problema

Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20.

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera Flos.
Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado $x^3+2x^2+10x=20$; Fibonacci pervenne al valore approssimato $x=1{,}3688$ come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.
Solo tra il 1540 e il 1545, ad opera dei matematici italiani Niccolò Fontana detto Tartaglia e Gerolamo Cardano, fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado per le equazioni che si presentano nella forma $x^3=px+q$.
In realtà una qualsiasi equazione di terzo grado può essere ricondotta a quella forma. Partendo da una equazione completa di terzo grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ con la sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ si arriva alla forma $y^3+py+q=0$ alla quale si applica la formula $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ … .

Esempio

- $x^3+3x^2+6x+5=0$

La sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ in questo caso diventa $x=y-1$. Con questa sostituzione l'equazione diventa $(y-1)^3+3(y-1)^2+6(y-1)+5=0$. Semplificando diventa $y^3+3y+1=0$. Applicando la formula risolutiva precedente si ha $y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ da cui $x=y-1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-1$

Esempio

Vogliamo risolvere l'equazione $x^3=15x+4$, nota come equazione di Raffaele Bombelli, matematico bolognese del XVI secolo. Bombelli la risolse attraverso passaggi che coinvolgono radici quadrate di numeri negativi che come hai studiato non esistono in campo reale.
Vediamo come possiamo determinare l'I.S. con le nostre conoscenze.
Scriviamo l'equazione nella forma canonica $p(x)=0$: $x^3-15x-4=0$ e serviamoci del teorema di Ruffini per determinarne uno zero intero. Sappiamo che gli eventuali zeri interi si trovano tra i divisori del termine noto, quindi possiamo provare con $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$.
Si ottiene $p(4)=0$ dunque $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(\ldots\ldots)=0$, il fattore da calcolare sarà di secondo grado e sarà determinato con la divisione di $p(x)=x^3-15x-4$ con il binomio $x-4$.
Eseguendo la divisione si ottiene: $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(x^2+4x+1)=0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto, $x-4=0 \rightarrow x=4 \ \vee\ x^2+4x+1=0 \rightarrow \emptyset$. L'ultima equazione non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo $(\Delta=\ldots\ldots)$
L'equazione assegnata ammette quindi una sola soluzione reale x=4 e due soluzioni complesse.

Poco dopo la scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo grado il matematico italiano Ferrari trovò anche la formula per risolvere le equazioni di quarto grado. Le ricerche per trovare la formula che risolvesse l'equazione di quinto grado furono invece vane, non perché i matematici non furono abbastanza 'ingegnosi' bensì per il fatto che, come dimostrò Galois non esistono formule che per mezzo di radici ed altre operazioni algebriche possano risolvere le equazioni dal quinto grado in poi. In altre parole esistono solo formule per le equazioni di secondo, terzo e quarto grado.
Oggigiorno, tuttavia, si preferisce non approfondire le applicazioni di queste formule. Si usa applicare solo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e per quelle di grado superiore al secondo si applicano i metodi che vedremo in questo capitolo oppure si preferisce applicare metodi di calcolo numerico che danno le soluzioni per approssimazioni successive.

►2. Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'Insieme Soluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

DEFINIZIONE. Un'equazione algebrica si presenta nella forma $p(x)=0$ dove $p(x)$ è un polinomio nella variabile x, di grado n, a coefficienti reali: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Esempio

■ Determinare le radici reali dell'equazione $4x^3+x^2-4x-1=0$

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:

$p(x)=4x^3+x^2-4x-1=4x\cdot(x^2-1)+(x^2-1)=(x^2-1)\cdot(4x+1)$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene $\begin{cases} x^2-1 \rightarrow x=-1 \vee x=1 \\ 4x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4} \end{cases}$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e $I.S.=\left\{-1\,;1\,;-\frac{1}{4}\right\}$.

■ $\frac{2x+3}{2x+1}+\frac{x^2}{x+1}=5x+3$

L'equazione assegnata è frazionaria

Riduciamo allo stesso denominatore $\frac{2x^2+5x+3+2x^3+x^2-10x^3-15x^2-5x-6x^2-9x-3}{(2x+1)\cdot(x+1)}=0$

Poniamo le Condizioni d'Esistenza $x\neq-\frac{1}{2} \wedge x\neq-1$

Eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili; si ottiene un'equazione di terzo grado

$8x^3+18x^2+9x=0$

Scomponiamo in fattori il polinomio $x\cdot(8x^2+18x+9)=0$

Per la legge di annullamento $x=0 \vee x^2+18x+9=0$. Risolvendo anche l'equazione di secondo grado si ottengono le soluzioni $x=0 \vee x=-\frac{3}{4} \vee x=-\frac{3}{2}$

Osservazione. Si dimostra che un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali e distinte, coincidenti o non reali, quante ne indica il suo grado.

Ricordiamo che uno **zero di un polinomio** è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero. L'obiettivo posto viene raggiunto ponendo il polinomio uguale a zero, come nell'esempio:

■ *Trovare gli zeri reali dei seguenti polinomi di terzo grado* $p(x)=x^3-7x^2+4x+12$.

Scriviamo l'equazione $x^3-7x^2+4x+12=0$ e cerchiamo di scomporre con il metodo di Ruffini.

Sostituendo x=-1 si ottiene $(-1)^3-7(-1)^2+4(-1)+12=-1-7-4+12=0$. Possiamo allora dividere il polinomio $x^3-7x^2+4x+12=0$ per il binomio x+1. Applicando la regola di Ruffini si ha

```
   1  -7  +4  +12
-1    -1  +8  -12
   1  -8  +12  //
```

Il polinomio si scompone in $(x+1)(x^2-8x+12)$. Per la legge di annullamento del prodotto

$x+1=0 \vee x^2-8x+12=0$. L'equazione x+1=0 dà come soluzione x=-1. L'equazione

$x^2-8x+12=0$ si può risolvere con la formula risolutiva ridotta $x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$

Le tre soluzioni sono allora -1; 2; 6.

Trova gli zeri del polinomio

1 $p(x)=x^3+5x^2-2x-24$ R. -4; -3; 2

2 $p(x)=6x^3+23x^2+11x-12$ R. 1/2; -3; -4/3

3 $p(x)=8x^3-40x^2+62x-30$ R. 5/2; 1; 3/2

4 $p(x)=x^3+10x^2-7x-196$ R. 4; -7

5 $p(x)=x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{17}{3}x-2$ R. $I.S.=\left\{-3,-\frac{1}{3},+2\right\}$

6 $p(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{38}{3}x+\frac{56}{3}$ R. $I.S.=\left\{-4,+\frac{7}{3},+2\right\}$

7 $p(x)=3x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ R. $I.S.=\left\{0,+\frac{1}{2},+1\right\}$

8 $p(x)=3x^3-9x^2-9x-12$ R. $I.S.=\{+4\}$

9 $p(x)=\frac{6}{5}x^3+\frac{42}{5}x^2+\frac{72}{5}x+12$ R. $I.S.=\{-5\}$

10 $p(x)=4x^3-8x^2-11x-3$ R. 3; -1/2

11 $p(x)=\frac{3}{2}x^3-4x^2-10x+8$ R. $I.S.=\left\{4,\frac{2}{3},-2\right\}$

12 $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ R. 2; -1/2

13 $p(x)=-3x^3+9x-6$ R. $I.S.=\{1,-2\}$

14 $p(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4$ R. $I.S.=\{2\}$

15 $p(x)=4x^3+4x^2-4x-4$ R. $I.S.=\{1,-1\}$

16 $p(x)=-\frac{2}{5}x^3+\frac{8}{5}x^2+\frac{14}{5}x-4$ R. $I.S.=\{5,1,-2\}$

17 $p(x)=-6x^3-30x^2+192x-216$ *R.* $I.S.=\{2,-9\}$

18 $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ *R.* $\pm 1;2$

19 $P(x)=9x^3-7x+2$ *R. -1; 1/2; 2/3*

20 $P(x)=x^3-7x^2+4x+12$ *R. 2; -1; 6*

21 $P(x)=x^3+10x^2-7x-196$

22 $P(x)=400x^3-1600x^2=400x-1600$

23 $p(x)=x^6-5x^5+6x^4+4x^3-24x^2+16x+32$

24 $P(x)=8x^3-14ax^2-5a^2x+2a^3=0$

25 $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

26 $P(x)=3x^5-19x^4+42x^3-42x^2+19x-3=0$

27 $ax^3-(a^2+1-a)x^2-(a^2+1-a)x+a=0$

Determinare l'I.S. delle equazioni

28 $x^3-3x+2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

29 $x^3+2x^2+2x+1=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

30 $x^3-6x+9=0$ R. $I.S.=\{-3\}$

31 $x^4-2x^2+1=0$

32 $x^3+3x^2-x-3=0$

33 $6x^3-7x^2-x+2=0$

34 $x^3-6x^2+11x-6=0$

35 $x^3-2x^4=0$

36 $x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$ R. 2; -2; 3

37 $x^5+1=x\cdot(x^3+1)$ R. $I.S.=\{-1;+1\}$

38 $\dfrac{x^3+2-x\cdot(2x+1)}{2x-1}=0$ R. $I.S=\{-1;1;2\}$

39 $2x^2-2x+3(x-1)=2x(2x^2-1)$ R. $I.S.=\{-1\}$

40 $(3x+1)^2=x(9x^2+6x+1)$ R. -1/3; 1

41 $(x+1)(x^2-1)=(x^2+x)(x^2-2x+1)$ R. $I.S.=\{\pm1;1\pm\sqrt{2}\}$

42 $(x-1)(x^2+x+1)=x(2-3x)+5$ R. $I.S.=\{-3;\pm\sqrt{2}\}$

43 $x^3+4x^2+4x=x^2-4$ R. $I.S.=\{-2\}$

44 $\sqrt{3}\ x^4-\sqrt{27}\ x^2=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};0;+\sqrt{3}\}$

45 $(x+1)^3-(x-1)^3=8$

46 $\sqrt{2}x^3-(1-2\sqrt{2})x^2-x=0$ R. $0;\sqrt{2}-1;-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$

47 $64x^7=27x^4$

48 $(x^2-4x)^{2011}=-(4x-x^2)^{2011}$

49 $x^7-x^6+\sqrt{27}x^5=0$ R $I.S.=\{0\}$

50 $3x^4-14x^3+20x^2-8x=0$ R. 0; 2/3; 2

51 $\dfrac{3x-1}{x^2}=1-2x+\dfrac{1}{x}$ R. $I.S.=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

52 $\dfrac{x-1}{x^2+5x+4}-\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{3}{2(x^2-1)}=0$ R. $I.S.=\left\{-\dfrac{3}{2};-2\right\}$

53 $\dfrac{x^2-3x}{2x}-\dfrac{x-2}{x-1}=0$ R. $0;3\pm\sqrt{2}$

54 $\dfrac{x(x-1)}{x+1}=\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$ R. $I.S.=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

55 $\dfrac{1}{x^4-4}=\dfrac{3}{x^4-16}$ R. $I.S.=\emptyset$

56 $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{1}{4-x^2}+\dfrac{1}{x^4-3x^2-4}$ R. $\pm1;\pm\sqrt{2}$

57 $\dfrac{x^4-4x^2+9}{x^4-3x^2+2}-\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$ R. $\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$

58 $(x^2-1)^3+7x^3=3x(4-x-x^3)-(x-2)^3$ R. $1;-\sqrt[3]{9}$

59 $\dfrac{x^2-1}{x^2-3}-\dfrac{x^2-3}{1-x^2}=\dfrac{10}{3}$ R. $0;\pm2$

►3. Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione del tipo $a x^n + b = 0$ con $a \neq 0$ e con $n \in \mathbb{N}_0$.
L'equazione così scritta è detta ***forma normale*** dell'equazione.
Dobbiamo distinguere i casi:

- $b \neq 0$
  - se n è pari l'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte se e solo se i due parametri a e b sono discordi: $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;
  - se n è dispari l'equazione ha un'unica soluzione reale $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.
- $b = 0$
  l'equazione è $a x^n = 0$ e le n soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione $x = 0$. In questo caso si dice che l'unica soluzione $x = 0$ ha molteplicità n.

Esempi

■ $3x^4 - 8 = 0$.

L'esponente n è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte: $x_1 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}}$ e $x_2 = -\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$.

Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori:
$3x^4 - 8 = 0 \rightarrow (\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto
$(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) = 0 \vee (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0$ la prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda
$(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0 \rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}} \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$

■ $-6x^4 + 9 = 13$

Riducendo alla forma normale troviamo $-6x^4 - 4 = 0$; moltiplicando ambo i membri per -1 si ottiene $6x^4 + 4 = 0$ in cui il primo membro è una somma di numeri sempre positivi sempre maggiore di 4, quindi in $\mathbb{R}$ l'equazione è impossibile e $I.S. = \emptyset$.

■ Determinare in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione: $8x^3 + 3 = 4$

Riduciamo l'equazione alla forma normale $8x^3 + 3 = 4 \rightarrow 8x^3 - 1 = 0$. Essendo di grado dispari, l'unica soluzione è $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$. Allo stesso risultato perveniamo se scomponiamo in fattori la differenza di cubi:
$8x^3 - 1 = 0 \rightarrow (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto
$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$ l'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$. Pertanto l'unica soluzione è $I.S. = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

■ $2x^7 + 3 = 2$

In forma normale si ha $-2x^7 + 1 = 0$ e si trova così l'unica soluzione reale $x = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}$.

■ $3x \cdot (x^2 + 1) = 4 \cdot (1 + x) - (7x + 4)$

Sviluppando i calcoli $3x^5 = 0 \rightarrow x^5 = 0 \rightarrow x = 0$ che ha una sola soluzione reale con molteplicità 5.

■ $x^3 + 3 = 0$

L'equazione ha l'unica soluzione reale $x = -\sqrt[3]{3}$. Spieghiamo il risultato scomponendo la somma di cubi $(x)^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 0 \rightarrow (x + \sqrt[3]{3}) \cdot (x^2 - x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto $(x + \sqrt[3]{3}) = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{3} \vee x^2 - \sqrt[3]{3}\, x + \sqrt[3]{3^2} = 0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$.

Determinate le soluzioni reali delle seguenti equazioni:

60 $-2x^3+16=0$ $\quad x^5+15=0$ $\quad$ R. $I.S.=\{2\}$; $I.S.=\{-\sqrt[5]{15}\}$

61 $x^4+16=0$ $\quad -2x^4+162=0$ $\quad$ R. $I.S.=\emptyset$; $I.S.=\{-3;+3\}$

62 $-3x^6+125=0$ $\quad 81x^4-1=0$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{3}}\right\}$ $\quad I.S.=\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$

63 $27x^3+1=0$ $\quad 81x^4-1=0$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; $I.S.=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$

64 $81x^4-1=0$ $\quad \frac{16}{x^4}-1=0$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3},+\frac{1}{3}\right\}$; $I.S.=\{-2;+2\}$

65 $x^6-1=0$ $\quad 8x^3-27=0$ $\quad$ R. $I.S.=\{-1;1\}$; $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

66 $x^5-1=0$ $\quad x^4+81=0$ $\quad$ R. $I.S.=\{1\}$; $I.S.=\emptyset$

67 $x^4-4=0$ $\quad 3x^5+96=0$ $\quad$ R. $I.S.=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ $\quad I.S.=\{-2\}$

68 $49x^6-25=0$ $\quad \frac{1}{x^3}=27$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{-\sqrt[3]{\frac{5}{7}},\sqrt[3]{\frac{5}{7}}\right\}$; $I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

69 $x^4-10000=0$ $\quad 100000x^5+1=0$

70 $x^6-64000000=0$ $\quad x^4+625=0$

71 $8x^3-27=0$ $\quad 8x^3+9=0$

72 $81x^4-16=0$ $\quad 16x^4-9=0$

73 $\frac{8}{x^3}-125=0$ $\quad \frac{81}{x^3}=27$

74 $81x^4=1$ $\quad x^3-\frac{1}{27}=0$

75 $\frac{x^6}{64}-1=0$ $\quad \frac{64}{x^6}=1$

76 $x^6=6$ $\quad x^{10}+10=0$

77 $x^{100}=0$ $\quad 10x^5-10=0$

78 $\frac{1}{81}x^4-1=0$ $\quad \frac{1}{x^4}-81=0$

79 $\sqrt[3]{2}\,x^6=\sqrt[3]{24}$ $\quad \frac{3}{5}x^3=\frac{25}{9}$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{\pm 2^{\frac{1}{9}}\cdot 3^{\frac{1}{18}}\right\}$

80 $x^8-256=0$ $\quad x^{21}+1=0$

81 $\frac{1}{243}x^5+1=0$ $\quad x^3+3\sqrt{3}=0$ $\quad$ R. $I.S.=\{-3\}$; $I.S.=\{\sqrt[6]{27}\}$

82 $6x^{12}-12=0$ $\quad \frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=0$

83 $\sqrt{3}\,x^3-3\sqrt[3]{3}=0$ $\quad \frac{x^4}{9}-\frac{9}{25}=0$ $\quad$ R. $I.S.=\left\{3^{\frac{5}{18}}\right\}$; $I.S.=\left\{\pm 3\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

84 $(x-1)^4=16$ $\quad (x^2-1)^3-27=0$

85 $\frac{3}{x^4-1}=\frac{5}{x^4+1}$

86 $\frac{x^4(x^2+2)-5}{x^2-1}=2(x^2+1)$

►4. Equazioni trinomie

Un'equazione *trinomia* è un'equazione con tre termini del tipo $x^4-5x^2+4=0$, $x^6-4x^3+3=0$, $x^{10}-x^5+6=0$. In generale si presentano nella forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$ dove n è un intero positivo e dove i coefficienti a e b sono non nulli.
Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo $t=x^n$ l'equazione trinomia diventa di secondo grado: $at^2+bt+c=0$ e da questa, detta per evidenti motivi *equazione risolvente*, si ricavano i valori di t . Successivamente, dalla relazione $t=x^n$, si ricavano i valori di x . Attraverso alcuni esempi vedremo come procedere alla ricerca dell'I.S.

Equazione biquadratica

Se **n = 2** l'equazione è detta **biquadratica** e si presenta nella forma $ax^4+bx^2+c=0$.

Esempio

■ $x^4-5x^2+4=0$

L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognita ponendo $x^2=t$;
l'equazione diventa $t^2-5t+4=0$ che ha due soluzioni reali distinte $t_1=1 \vee t_2=4$.
Per determinare le soluzioni dell'equazione assegnata teniamo conto della sostituzione fatta:

$$\begin{cases}\text{da } t_1=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x_1=-1 \vee x_2=+1\\ \text{da } t_2=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_1=-2 \vee x_2=+2\end{cases}$$

Pertanto l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e $I.S.=\{-1;+1-2;+2\}$.

■ $2x^4+3x^2-2=0$

L'equazione è biquadratica, ponendo $x^2=t$ diventa $2t^2+3t-2=0$ che ha per soluzioni $t_1=-2 \vee t_2=\frac{1}{2}$. Ritornando alla sostituzione iniziale:

$$\begin{cases}\text{da } t_1=-2 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow I.S.=\ldots\ldots\ldots\\ \text{da } t_2=\frac{1}{2} \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \rightarrow \text{razionalizzando } x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots\end{cases}$$

■ $x^4-\frac{16}{9}x^2=0$

E' biquadratica incompleta; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo x^2 a fattore comune e per la legge di annullamento del prodotto possiamo concludere $x^2=0 \vee x^2=\ldots\ldots\ldots$ da cui $I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\}$

Conclusione

L'equazione biquadratica $ax^4+bx^2+c=0$

- ha quattro soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risultano positivi anche i rapporti $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ che indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle sue soluzioni. Infatti … … ...
- ha due soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione è positivo e se risulta negativo il rapporto $\frac{c}{a}$ che indica il prodotto delle sue soluzioni. Infatti … … …
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione è positivo e se risulta positivo il rapporto $\frac{c}{a}$ e negativo il rapporto $-\frac{b}{a}$. Infatti … … ...
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione è negativo.

Per stabilire il numero di soluzioni di un'equazione biquadratica si può anche utilizzare la regola dei segni di Cartesio:

- $\Delta>0$ e due variazioni si hanno 4 soluzioni reali
- $\Delta>0$ 1 permanenza e 1 variazione si hanno 2 soluzioni reali
- $\Delta=0$ $-\frac{b}{2a}>0$ si hanno due soluzioni reali; $-\frac{b}{2a}<0$ nessuna soluzione reale
- $\Delta<0$ nessuna soluzione reale.

Determinare l'I.S. delle seguenti equazioni biquadratiche:

87 $x^4-13x^2+36=0$ R. $I.S:=\{-3;3;2;-2\}$

88 $2x^4-20x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-1;1;3;-3\}$

89 $x^4-\frac{37}{9}x^2+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

90 $x^4-\frac{13}{3}x^2+\frac{4}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

91 $-x^4+\frac{17}{4}x^2-1=0$ R. $I.S.=\left\{-2;2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

92 $-2x^4+\frac{65}{2}x^2-8=0$ R. $I.S:=\left\{-4;4;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

93 $-2x^4+82x^2-800=0$ R. $I.S:=\{-4;4;-5;5\}$

94 $-3x^4+\frac{85}{3}x^2-12=0$ R. $I.S:=\left\{-3;3;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

95 $x^4-\frac{16}{3}x^2+\frac{16}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

96 $x^4-7x^2+6=0$ R. $I.S:=\{-1;1;-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

97 $x^4-10x^2+16=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$

98 $-3x^4+9x^2+12=0$ R. $I.S:=\{-2;2\}$

99 $-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-3;3\}$

100 $x^4+\frac{15}{4}x^2-1=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

101 $-8x^4-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$

102 $-16x^4-63x^2+4=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\}$

103 $x^4-2x^2-15=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$

104 $x^4-2x^2-3=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

105 $x^4-8x^2+16=0$

106 $8x^2+\frac{6x^2+x-4}{x^2-1}=4-\frac{3+4x}{1+x}$ R. $I.S.=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\right\}$

107 È vero che l'equazione $4x^4-4=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti?

108 È vero che l'equazione $-x^4+2x^2-1=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti?

109 Perché le seguenti equazioni non hanno soluzioni reali?

A) $x^4+\frac{37}{4}x^2+\frac{9}{4}=0$ B) $x^4-x^2+3=0$ C) $-2x^4-x^2-5=0$ D) $-x^4-5x^2-4=0$

110 Senza risolvere le seguenti equazioni, dire se ammettono soluzioni reali:

A) $2x^4+5x^2-4=0$ B) $2x^4-5x^2+4=0$ C) $x^4-5x^2+1=0$ D) $-4x^4+5x^2-1=0$

R. [si, no, si, no]

111 $x^2\cdot(x^2-2a+1)=a\cdot(1-a)$ per quali valori del parametro a ha quattro soluzioni reali. R. $a>1$

112 È vero che la somma delle radici dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$ è nulla?

113 Verifica le seguenti uguaglianze relative alle soluzioni (reali) dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$:

A) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-\frac{2b}{a}$ B) $x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2\cdot x_4^2=\frac{c}{a}$

Equazioni trinomie con n > 2

Esempi

■ $x^6-4x^3+3=0$

Ponendo $t=x^3$ abbiamo l'equazione risolvente $t^2-4t+3=0$, le cui soluzioni reali sono $t_1=1$, $t_2=3$; per ricavare i valori di x è sufficiente risolvere le due equazioni binomie $x^3=1$ e $x^3=3$, trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata $x_1=1 \vee x_2=\sqrt[3]{3}$

■ $x^8-x^4-2=0$

Ponendo $t=x^4$ arriviamo all'equazione $t^2-t-2=0$ da cui $t_1=2$ e $t_2=-1$; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono: $x^4=2$ e $x^4=-1$, quindi

- $x^4=2 \rightarrow x^2=-\sqrt{2} \vee x^2=+\sqrt{2}$ e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente $x_1=\sqrt[4]{2}; \; x_2=-\sqrt[4]{2}$.
- $x^4=-1$ che non ha soluzioni reali

concludendo: $I.S.=\{-\sqrt[4]{2};+\sqrt[4]{2}\}$

■ $x^{12}+x^6+3=1-2x^6$.

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{12}+3x^6+2=0$; l'equazione non ha soluzioni reali: possiamo infatti osservare che per qualunque valore reale attribuito all'incognita, la somma dei tre termini a primo membro è ≥ 2 e quindi non può essere $=0$. Si osservi d'altra parte che, posto $t=x^6$, si ricavano le soluzioni $t_1=-1$ e $t_2=-2$ entrambe negative e quindi le due equazioni binomie $x^6=-1$ e $x^6=-2$ risultano essere impossibili in $\mathbb{R}$.

■ $x^{10}-x^5+7=1$

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{10}-x^5+6=0$; l'equazione risolvente $t^2-t+6=0$ non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo e quindi $I.S.=\emptyset$

Determinare le soluzioni reali delle seguenti equazioni trinomie

114 $x^6+13x^3+40=0$ R. $I.S:=\{-2;-\sqrt[3]{5}\}$

115 $x^8-4x^4+3=0$ R. $I.S:=\{1;-1;\sqrt[4]{3};-\sqrt[4]{3}\}$

116 $-x^6+29x^3-54=0$ R. $I.S:=\{3;\sqrt[3]{2}\}$

117 $\frac{1}{2}x^{10}-\frac{3}{2}x^5+1=0$ R. $I.S:=\{1;\sqrt[5]{2}\}$

118 $-3x^{12}-3x^6+6=0$ R. $I.S:=\{1;-1\}$

119 $2x^8+6x^4+4=0$ R. $\emptyset$

120 $-x^8-6x^4+7=0$ R. $I.S:=\{1;-1\}$

121 $-2x^6+\frac{65}{4}x^3-2=0$ R. $I.S:=\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$

122 $-\frac{3}{2}x^{10}+\frac{99}{2}x^5-48=0$ R. $I.S:=\{1;2\}$

123 $-\frac{4}{3}x^{14}-\frac{8}{9}x^7+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-1;\sqrt[7]{\frac{1}{3}}\right\}$

►5. Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

Esempio

- $(x^2-4)^4-1=0$

Sostituendo $t=x^2-4$ l'equazione diventa $t^4-1=0$. È un'equazione binomia che ha per soluzioni $t_1=-1;\ t_2=+1$. Sostituendo questi valori nella relazione $t=x^2-4$ si ha

$$\begin{cases}-1=x^2-4\to x^2=3\to x=\pm\sqrt{3}\\+1=x^2-4\to x^2=5\to x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

124 $(x^3+1)^3-8=0$ R. $I.S.=\{1\}$

125 $2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1=0$ sostituire $\frac{x+1}{x-1}=t$ R. $I.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

126 $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+8=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$

127 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{16}{9}$ R. $I.S.=\emptyset$

128 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-16\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ R. $I.S.=\{8-3\sqrt{7};8+3\sqrt{7}\}$

129 $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2-12\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+27=0$ R. $I.S.=\left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{3};\pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$

130 $(2x-1)^3=8$ R. $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

131 $(x+1)^3+6(x+1)^2-(x+1)-30=0$ R. $I.S.=\{-6;-4;1\}$

132 $(x^2+1)^3-4(x^2+1)^2-19(x^2+1)-14=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

133 $\frac{3x}{x+1}-\left(\frac{3x}{x+1}\right)^3=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2}\right\}$

134 $(x-1)^2+\frac{x-3}{(x-1)^2}=\frac{x+6}{(1-x)^2}$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

135 $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+4=0$ R. $I.S.=\left\{0;3,\frac{1}{3}\right\}$

136 $(x^3+2)^5=1$

137 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^4-13\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+36=0$

138 $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4-10\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2+9=0$

139 $(x-\sqrt{2})^6-4(x-\sqrt{2})^3+3=0$

140 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{10}-33\left(\frac{x+1}{x}\right)^5+32=0$

141 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-13+36\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=0$

142 $\frac{x-3}{x+3}+2=15\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

143 $(x^2-1)^3+\frac{8}{(x^2-1)^3}=9$

144 $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3-3\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3-4\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3+12=0$

►6. Equazioni reciproche

Dato un polinomio ordinato, le *coppie di coefficienti equidistanti dagli estremi* sono le coppie costituite dal primo e dall'ultimo coefficiente, dal secondo e dal penultimo, dal terzo e dal terzultimo, ecc. Se il numero dei coefficienti è dispari (ciò accade se il grado del polinomio è pari), per convenzione si considera una coppia di coefficienti equidistanti il termine centrale, contato due volte.

DEFINIZIONI

Un'equazione è detta **reciproca di prima specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **uguali**.

Un'equazione è detta **reciproca di seconda specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **opposti**. In particolare, se $p(x)$ ha grado $2k$ (pari), il coefficiente di x^k è nullo.

- $x^3-2x^2-2x+1=0$ è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie.
- $3x^4+5x^3-4x^2+5x+3=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie.
- $-7x^4+5x^3-5x+7=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie.
- $3x^5+2x^4+6x^3-6x^2-2x-3=0$ è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie.
- $-2x^4+8x^3+3x^2-8x+2=0$ è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni:

TEOREMA (delle radici reciproche). Se λ è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche $\frac{1}{\lambda}$ è radice dell'equazione.

Consideriamo l'equazione reciproca di prima specie $a_0x^n+a_1x^{n-1}++a_2x^{n-2}\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$.

- *Ipotesi*: $x=\lambda$ è una radice dell'equazione;
- *Tesi*: $x=\frac{1}{\lambda}$ è una radice dell'equazione.
- *Dimostrazione*:
  Sappiamo che se $x=\lambda$ è una radice allora è vera l'uguaglianza $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ (*). Sostituiamo $\frac{1}{\lambda}$ al posto della x nel polinomio al primo membro, si ha: $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)+a_0$ che, svolti i calcoli, diventa $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{a_0+a_1\lambda+\ldots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n}{\lambda^n}$.
  Osservando il numeratore notiamo che è proprio quanto scritto in (*) e pertanto, essendo il denominatore diverso da zero, si ha $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$ che dimostra la tesi. C.V.D.

145 Dimostra il teorema per le equazioni di seconda specie.

146 Dopo aver verificato che $x=3$ è radice dell'equazione $3x^3-13x^2+13x-3=0$, verificate che l'equazione ammette come soluzione $x=\frac{1}{3}$.

Analizziamo i metodi risolutivi per le equazioni reciproche.

Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ e hanno $x = -1$ come radice: infatti sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro si ottiene: $p(-1) = a_0(-1)^3 + a_1(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -a_0 + a_1 - a_1 + a_0 = 0$.

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per $x+1$; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo allora scrivere $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = (x+1) \cdot \left(a_0 x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0\right) = 0$ da cui con la legge di annullamento del prodotto possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

Un modo "alternativo" per determinare l'I.S. dell'equazione reciproca $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti a_0 e a_1 : $a_0\left(x^3+1\right) + a_1\left(x^2+x\right) = 0$ da cui $a_0(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) + a_1 x(x+1) = 0$ e raccogliendo il binomio $(x+1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x+1) \cdot \left(a_0 x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0\right) = 0$.

Esempio

- $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è $x = -1$, per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere $(x+1)\left(x^2 - 6x + 1\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x = -1$ già nota e, risolvendo l'equazione $x^2 - 6x + 1 = 0$ troviamo le altre radici $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ e $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ e quindi $I.S. = \{-1 ; 3 + 2\sqrt{2} ; 3 - 2\sqrt{2}\}$.

- $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$

L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di prima specie ammette dunque $x = -1$ come radice.
Infatti $p(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 5(-1) + 3 = \ldots\ldots\ldots$
Il polinomio al primo membro si può scomporre con la regola di Ruffini

```
    3  -5  -5  +3
-1      -3  +8  -3
----------------
    3  -8  +3  //
```

si scompone in $(x+1)\left(3x^2 - 8x + 3\right) = 0$; per la legge di annullamento del prodotto avremo
$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ come già noto oppure
$3x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = \ldots\ldots \vee x_2 = \ldots\ldots \rightarrow I.S. = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
Verifica che l'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

147 $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$ R. -1; -1/3; +3

148 $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ R. -1; +2; +1/2

149 $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$ R. -1; +5; -1/5

150 $12x^3 + 37x^2 + 37x + 12 = 0$

151 $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$

152 $15x^3 - 19x^2 - 19x + 15 = 0$

153 $4x^3 + 13x^2 - 13x = 4$

154 $2 + 2x^3 = 3x^2 + 3x$

155 $3x(10x - 19) + 9x(x+2) = 10(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$

156 $2x^3 - (3\sqrt{2} + 2)x^2 - (3\sqrt{2} + 2)x + 2 = 0$ R. $-1 ; -\sqrt{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}$

157 $x^3 + x^2(2\sqrt{2} + 1) + x(2\sqrt{2} + 1) + 1 = 0$ R. $-1 ; -\sqrt{2} - 1 ; -\sqrt{2} + 1$

158 $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ R. $-1 ; \sqrt{3} + 2 ; 2 - \sqrt{3}$

159 $ax^3 + \left(a^2 + a + 1\right)x^2 + \left(a^2 + a + 1\right)x + 1$ R. -1; -a; -1/a

Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: ; e $a_0 x^3+a_1 x^2-a_1 x-a_0=0$ hanno $x=1$ come radice, basta verificare sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro: $p(1)=a_0(1)^3+a_1(1)^2-a_1(1)-a_0=a_0+a_1-a_1-a_0=0$.
Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro: $(x-1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_0+a_1)x+a_0\right)=0$ e quindi determinare l'I.S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

Esempi

■ $2x^3-7x^2+7x-2=0$

E' un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie, i coefficienti infatti sono opposti a due a due. Una radice è $x_1=1$ e pertanto l'equazione può essere scritta nel modo seguente: $2x^3-2-7x^2+7x=0 \rightarrow 2(x^3-1)-7x(x-1)=0 \rightarrow 2(x-1)(x^2+x+1)-7x(x-1) \rightarrow$ $(x-1)(2x^2+2x+2-7x)=0 \rightarrow (x-1)\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x=1$ già nota e risolvendo $\left(2x^2-5x+2\right)=0$ si ricavano le altre due radici: $x_2=2$ e $x_3=\frac{1}{2}$ e dunque $I.S.=\left\{1;2;\frac{1}{2}\right\}$.

■ $2x^3-9x^2+9x-2=0$

L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di seconda specie perché ha i coefficienti opposti a due a due,e dunque ammette $x=+1$ come radice. Infatti $p(+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Applichiamo la regola di Ruffini per scomporre in fattori il polinomio di terzo grado.

```
   2 -9  +9 -2
-1    -2 +11 -2
   2 -11 +2 //
```

Il polinomio si scompone in $(x-1)\left(2x^2-\ldots\ldots\ldots\right)=0$.
Per la legge di annullamento del prodotto avremo $x-1=0 \rightarrow x=1$ come già noto oppure
$2x^2-\ldots\ldots\ldots=0 \rightarrow x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \rightarrow I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

160 Vero/Falso

a) l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ammette sempre $x=-1$ come soluzione V F
b) se nell'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a=d$ e $b=c$ allora $x=-1$ è una soluzione V F
c) in una equazione reciproca di terzo grado la somma dei coefficienti è nulla V F
d) se in $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a+d=0$ e $b+c=0$ allora $x=1$ appartiene all'I.S. V F

Risolvi le seguenti equazioni dopo aver verificato che sono equazioni reciproche di terzo grado di 2a specie:

161 $6x^3-19x^2+19x-6=0$ R. 1; 2/3; 3/2

162 $7x^3-57x^2+57x-7=0$ R. 1;7; 1/7

163 $3x^3+7x^2-7x-3=0$

164 $12x^3+13x^2-13x-12=0$

165 $10x^3+19x^2-19x-10=0$

166 $x^3+3x^2-3x-1=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1\}$

167 $\frac{x^3-1}{x}=\frac{21}{4}\cdot(1-x)$

168 $5x^3+(6\sqrt{5}-5)x^2+x(5-6\sqrt{5})-5=0$ R. $1;-\sqrt{5};-\frac{\sqrt{5}}{5}$

169 $x^3+13x^2-13x-1=0$ R. $1;-7-4\sqrt{3};-7+4\sqrt{3}$

170 $4x^3+(5\sqrt{5}-1)+x(1-5\sqrt{5})=4$ R. $1;-\sqrt{5}-1;\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$

Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo: $a_0 x^4+a_1 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0=0$

Prima di tutto osserviamo che $x=0$ non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe nullo il termine noto, cioè $a_0=0$ e di conseguenza sarebbe nullo anche il coefficiente di x^4, il grado dell'equazione diventerebbe ≤ 3. Questa premessa ci consente di dividere per x^2 ottenendo l'equazione equivalente data $a_0 x^2+a_1 x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}=0$, raccogliendo a fattori parziali si ha $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$.

Ponendo $t=x+\frac{1}{x}$ quindi $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ da cui $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ e sostituendo nell'equazione $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$ ricaviamo la seguente equazione di secondo grado equivalente alla data: $a_0(t^2-2)+a_1 t+a_2=0 \rightarrow a_0 t^2+a_1 t+a_2-2a_0=0$. Trovate, se esistono reali, le radici t_1 e t_2 di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ fratte nell'incognita x, rispettivamente equivalenti a $x^2-t_1 x+1=0$; $ax^2-t_2 x+1=0$. Queste ultime equazioni hanno soluzioni reali se e solo se $|t|\ge 2$.

Infatti, risolvendo rispetto a x l'equazione $x+\frac{1}{x}=t$, troviamo: $x^2-tx+1=0$ e calcolando il discriminante $\Delta=t^2-4$ vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se $t^2-4\ge 0$ ovvero se e solo se $t\le -2 \vee t\ge 2$ cioè $|t|\ge 2$.

Esempi

- $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Ponendo $t=x+\frac{1}{x}$ otteniamo l'equazione $1\cdot(t^2-2)-4t+5=0$ ovvero $t^2-4t+3=0$ da cui $t_1=1$ e $t_2=3$. Il primo valore t_1 non dà soluzioni reali poiché l'equazione $x+\frac{1}{x}=1$ ha il discriminante negativo mentre l'equazione $x+\frac{1}{x}=3$ ha due soluzioni reali distinte $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

Dividiamo ambo i membri dell'equazione per x^2, certamente diverso da zero e otteniamo:

$2x^2+3x-16+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0 \rightarrow 2\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\cdot(\ldots\ldots\ldots)-\ldots=0 \rightarrow 2\cdot(t^2-\ldots\ldots)+3t=0 \rightarrow$

$\rightarrow 2t^2+3t-20=0 \rightarrow t_1=\ldots\ldots\ldots \vee t_2=\ldots\ldots\ldots$

Poiché $|t|\ge 2$ le equazioni $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ hanno entrambe soluzioni reali distinte, pertanto $I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

171 Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0(t^2-2)+a_1 t+a_2=0 \rightarrow a_0 t^2+a_1 t+a_2-2a_0=0$ affinché esistano reali i valori della nuova incognita t.

Risolvi le seguenti equazioni

172 $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ R. $1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

173 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$ R. $-3\pm 2\sqrt{2}$

174 $x^4+2x^3-13x^2+2x+1=0$ R. $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

175 $x^4-\frac{5}{6}x^3-\frac{19}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1=0$ R. $x=3; x=\frac{1}{3}; x=-2; x=-\frac{1}{2}$

Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^4+a_1 x^3-a_1 x-a_0=0$ in cui il coefficiente di x^2 è nullo.
Per risolvere questa equazione, raccogliamo a fattore parziale a_0 e a_1 ottenendo:
$a_0(x^4-1)+a_1(x^3-x)=0$ da cui $a_0(x^2-1)(x^2+1)+a_1 x(x^2-1)=0$
Raccogliendo a fattore comune totale si ha (x^2-1)
Scomponendo in fattori: $(x^2-1)(a_0(x^2+1)+a_1 x)=0$ ovvero $(x-1)(x+1)(a_0 x^2+a_1 x+a_0)=0$
Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici $x_1=1,\ x_2=-1$ e le eventuali radici reali dell'equazione di secondo grado $a_0 x^2+a_1 x+a_0=0$.

176

Esempio

- $x^4-8x^3+8x-1=0$

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie, si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo e che gli altri coefficienti sono a due a due opposti.

Raccogliendo a fattore comune parziale $(x^4-1)-8x(x^2-1)=0$ → $(x^2-1)(x^2+1)-8x(x^2-1)$ mettendo in evidenza il binomio (x^2-1) abbiamo: $(x^2-1)(x^3-8x+1)$ da cui, risolvendo le equazioni $x^2-1=0$ e $x^3-8x+1=0$, otteniamo tutte le radici: $x_1=1 \vee x_2=-1 \vee x_3=4+\sqrt{15} \vee x_4=4-\sqrt{15}$ e quindi $I.S.=\{-1;\ 1,\ 4+\sqrt{15};\ 4-\sqrt{15}\}$.

177 Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0 x^2+a_1 x+a_0=0$ affinché esistano reali le sue soluzioni.

178 Determinare per quale valore di k , l'equazione $(2k-\sqrt{2})x^4+5x^3-5x-2\sqrt{2}=0$ è reciproca.
È vero che $I.S.=\{+1;-1\}$? R. $k=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Risolvi le seguenti equazioni

179 $x^4-3x^3+3x-1=0$ R. $\pm 1;\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

180 $4x^4-5x^3+5x-4=0$ R. ± 1

181 $3x^4+7x^3-7x-3=0$ R. $\pm 1;\ \frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$

182 $x^4-7x^3+7x-1=0$ R. $\pm 1;\ \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

183 $5x^4-11x^3+11x-5=0$ R. $\pm 1;\ \frac{11\pm\sqrt{21}}{10}$

184 $6x^4-13x^3+13x-6=0$ R. $\pm 1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}$

185 $7x^4-15x^3+15x-7=0$ R. $\pm 1;\ \frac{15\pm\sqrt{29}}{14}$

186 $x^3(x-1)=1-4x$ R. $\pm 1;\ 2\pm\sqrt{3}$

187 $\frac{x-5}{5x-1}+\frac{1}{x^3}=0$ R. $\pm 1;\ \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

188 $\frac{x^2}{6x^3+1}=\frac{x}{x^3+6}$ R. $0;\ \pm 1;\ 3\pm\sqrt{2}$

189 $\frac{x^4+2x-1}{8x^3}-\frac{1+8x^2}{4x^2}+\frac{x-1}{x}+\frac{1+x}{x^2}=0$ R. $\pm 1;\ 4\pm\sqrt{15}$

Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.
Con il raccoglimento parziale possiamo scrivere: $a_0 (x^5 + 1) + a_1 (x^4 + x) + a_2 (x^3 + x^2) = 0$
applicando la formula per la scomposizione della somma di potenze abbiamo:
$a_0 (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + a_1 x (x+1)(x^2 - x + 1) + a_2 x^2 (x+1) = 0$
raccogliendo $(x+1)$ ricaviamo: $(x+1)\{a_0(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + a_1 x (x^2 - x + 1) + a_2 x^2\} = 0$
e quindi l'equazione diventa: $(x+1)\{a_0 x^4 + (a_1 - a_0) x^3 + (a_2 - a_1 + a_0) x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0\} = 0$
Per la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale $x = -1$ e con i metodi analizzati in precedenza si risolve l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:
$(a_0 x^4 + (a_1 - a_0) x^3 + (a_2 - a_1 + a_0) x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0) = 0$.

Esempio

■ $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$.

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è $x_1 = -1$; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere allora riscritta nella forma seguente:
$(x+1)(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6) = 0$.
Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$, si trovano le altre quattro radici: $x_2 = -2,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 3,\ \text{e}\ x_5 = \frac{1}{3}$. $I.S. = \left\{-1; -2; -\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}\right\}$

Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 = 0$.

Con il raccoglimento parziale si ottiene $a_0 (x^5 - 1) + a_1 (x^4 - x) + a_2 (x^3 - x^2) = 0$
applicando la formula per la somma di potenze, si ha:
$a_0 (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + a_1 x (x-1)(x^2 + x + 1) + a_2 x^2 (x-1) = 0$
raccogliendo il binomio $(x-1)$ si ottiene $(x-1)\{a_0(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + a_1 x (x^2 + x + 1) + a_2 x^2\} = 0$
e quindi $(x+1)(a_0 x^4 + (a_1 - a_0) x^3 + (a_2 - a_1 + a_0) x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0) = 0$
Una radice è $x = 1$ e le altre provengono dall'equazione di quarto grado reciproca di prima specie: $a_0 x^4 + (a_1 + a_0) x^3 + (a_2 + a_1 + a_0) x^2 + (a_1 + a_0) x + a_0 = 0$.

Esempio

■ $x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$.

E' un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1 = 1$; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere riscritta nella forma seguente: $(x-1)(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1) = 0$. Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$, si trovano altre due radici reali: $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ e $x_3 = -2 - \sqrt{3}$, pertanto $I.S. = \{+1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$

Equazione reciproca di sesto grado:

Esempio

■ $-x^6 + 6x^5 + 6x^4 - 6x^2 - 6x + 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è nullo); l'equazione ammette per radici $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, quindi possiamo dividere il polinomio per il binomio $(x^2 - 1)$, ottenendo come quoziente $-x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x - 1$; si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali: $x_3 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$.

190 Nell'equazione $(2-a)x^5 - x^4 + (3+a)x^3 + 2bx^2 + x + 5b = 0$ determinare a e b in modo che l'equazione sia reciproca. R. $a = -\frac{11}{7};\ b = \frac{5}{7}$

Risolvi le seguenti equazioni

191 $6x^3+7x^2-7x-6=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{2}{3};1\right\}$

192 $2x^3+5x^2+5x+2=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

193 $x^3-3x^2+3x-1=0$ R. $I.S.=\{1\}$

194 $3x^3-4x^2+4x-3=0$ R. $I.S.=\{1\}$

195 $2x^4-5x^3+5x-2=0$ R. $I.S.=\left\{\frac{1}{2};2;-1;1\right\}$

196 $-5x^4+3x^3-3x+5=0$ R. $I.S.=\{-1;1\}$

197 $2x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

198 $-2x^4+8x^3-8x+2=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1;1\}$

199 $2x^3-5x^2-5x+2=0$ R. $x=-1;x=\frac{7+\sqrt{33}}{4};x=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$

200 $3x^3-6x^2-6x+3=0$ R. $x=-1;x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

201 $5x^3-7x^2+7x-5=0$ R. $x=1$

202 $4x^3-20x^2+20x-4=0$ R. $x=1;x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

203 $5x^3-5x^2-5x+5=0$ R. $x=1;x=-1$

204 $4x^3-9x^2+9x-4=0$ R. $x=1$

205 $\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0$ R. $x=1;x=-\frac{2}{3};x=-\frac{3}{2}$

206 $3x^3-2x^2+2x-3=0$ R. $x=1$

207 $-2x^3+10x^2+10x-2=0$ R. $x=-1;x=3+2\sqrt{2};x=3-2\sqrt{2}$

208 $x^4-\frac{9}{4}x^3-\frac{13}{2}x^2-\frac{9}{4}x+1=0$ R. $x=-1;x=4;x=\frac{1}{4}$

209 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ R. $x=1$

210 $x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2+\frac{10}{3}x+1=0$ R. $x=-3;x=-\frac{1}{3}$

211 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$ R. $x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

212 $x^4-x^3+x-1=0$ R. $x=1;x=-1$

213 $x^4-6x^3+6x-1=0$ R. $\pm 1;x=3\pm 2\sqrt{2}$

214 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

215 $x^4-5x^3-12x^2-5x+1=0$ R. $x=-1;x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2};x=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

216 $3x^4-x^3+x-3=0$ R. $x=1;x=-1$

217 $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$ R. $x=2;x=\frac{1}{2}$

218 $2x^4-x^3+4x^2-x+2=0$ R. impossibile

219 $3x^4-7x^3+7x-3=0$ R. $\pm 1;\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$

220 $3x^4-6x^3+6x-3=0$ R. $x=1;x=-1$

221 $2x^4-6x^3+4x^2-6x+2=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

222 $x^4+8x^3-8x-1=0$ R. $\pm 1;x=-4\pm\sqrt{15}$

223 $6x^4-37x^3+37x-6=0$ R. $\pm 1;+6;\frac{1}{6}$

224 $x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=1;x=-1$

225 $x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$ R. $x=-1;x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

226 $x^5+3x^4+x^3-x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

227 $x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=0$ R. $x=1$

228 $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1=0$ R. $x=1$

229 $x^5-5x^3-5x^2+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

230 $x^5+3x^4-2x^3+2x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-2+\sqrt{3}\,;\,x=-2-\sqrt{3}$

231 $2x^5-2x^4+2x^3+2x^2-2x+2=0$ R. $x=-1$

232 $x^6-x^5-5x^4+5x^2+x-1=0$ R. $\pm 1\,;\,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

233 $x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

234 $x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

235 $x^5-\frac{11}{4}x^4-\frac{55}{8}x^3+\frac{55}{8}x^2+\frac{11}{4}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=4\,;\,x=\frac{1}{4}\,;\,x=-2\,;\,x=-\frac{1}{2}$

236 $x^5-4x^4+\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-4x+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=2\,;\,x=\frac{1}{2}$

237 $x^6+\frac{13}{6}x^5+x^4-x^2-\frac{13}{6}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-\frac{3}{2}\,;\,x=-\frac{2}{3}$

238 $x^6+\frac{16}{3}x^5+\frac{23}{3}x^4-\frac{23}{3}x^2-\frac{16}{3}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-3\,;\,x=-\frac{1}{3}$

239 $x^6+x^4-x^2-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

240 $x^6-4x^5-x^4+8x^3-x^2-4x+1=0$ R. $\pm 1\,;\,2\pm\sqrt{3}$

241 $x^6+2x^4+2x^2+1=0$ R. impossibile

242 $3(2x-2)^3+(10x-5)^2-25=0$ R. $1\,;\,-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{2}{3}$

243 $\frac{6x^2-2}{x^2+1}=\frac{6}{x^4-5x^2-6}+\frac{5x}{6-x^2}$ R. 2; ½; -3; -1/3

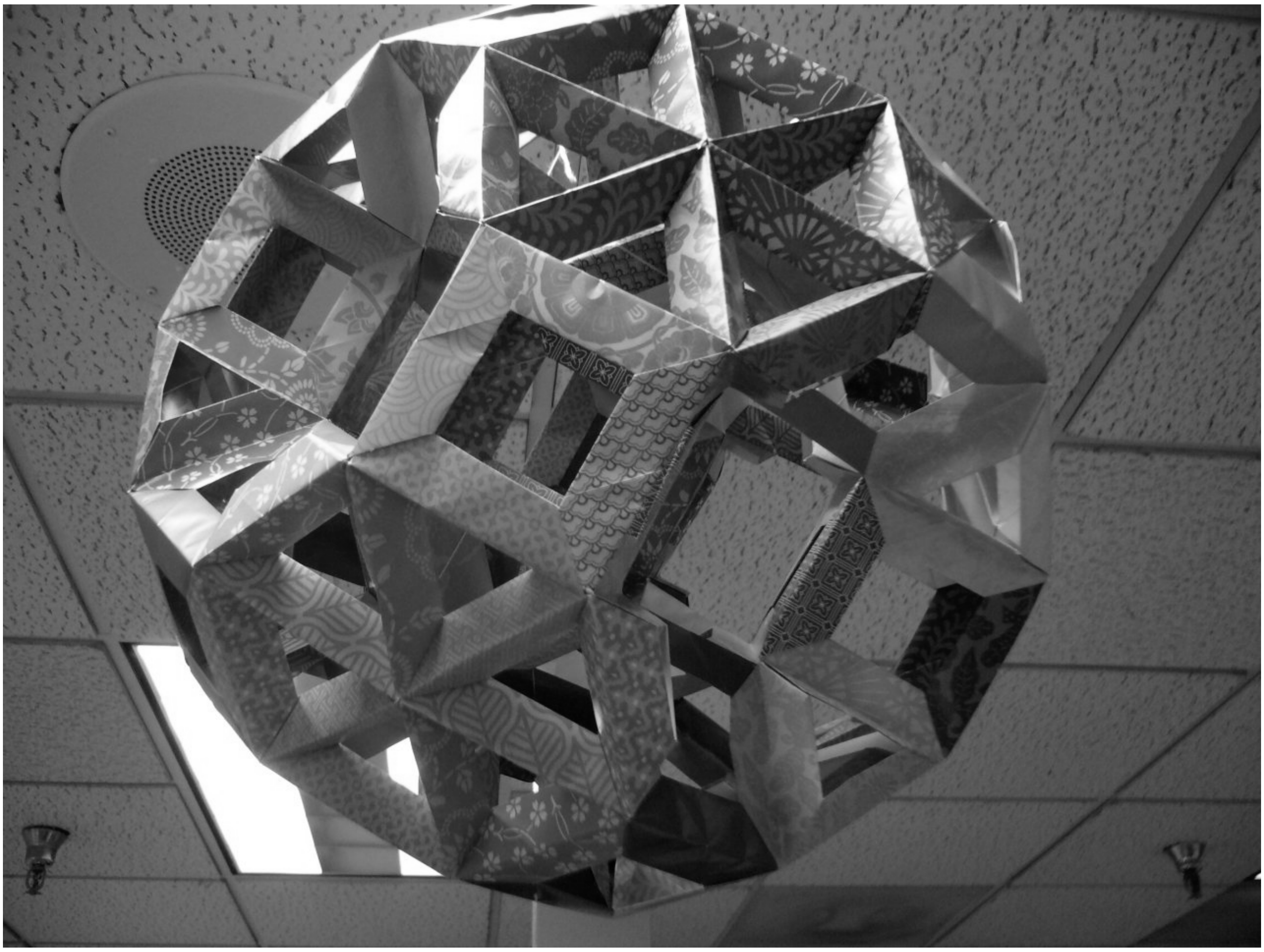
244 $x^4+5x(x+1)^2+(1-2x)(1+2x)=0$ R. $-3\pm 2\sqrt{2}$

245 $\frac{9x^2(x+4)}{9x+1+\sqrt{10}}=\frac{9x+1-\sqrt{10}}{x-6}$ R. $\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

246 $\frac{x^2(x+4)}{x-1}-\frac{8x+1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}=0$ R. $-3\pm 2\sqrt{2}$

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

4 DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Ardonik, *easy-origami-fold-a-day-calendar-great-rhombicub octahedron*
http://www.flickr.com/photos/ardonik/2833120348

Indice

►1. Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

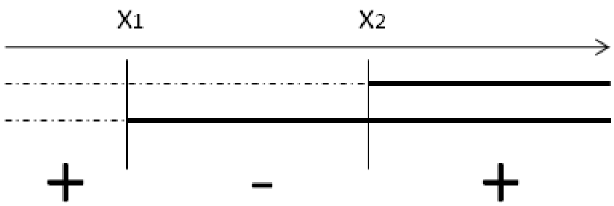
Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$a\,x^2+b\,x+c>0\,;\qquad a\,x^2+b\,x+c\geq 0\,;\qquad a\,x^2+b\,x+c<0\,;\qquad a\,x^2+b\,x+c\leq 0$$

Per risolverla innanzitutto supponiamo che il coefficiente di x^2, cioè il coefficiente "*a*" sia positivo. Se così non fosse, basterebbe cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2\,x^2+3\,x-1>0$ si può risolvere la disequazione $2\,x^2-3\,x+1<0$.
Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostituisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè dalla disequazione $a\,x^2+b\,x+c>0$ all'equazione $a\,x^2+b\,x+c=0$.
Possono presentarsi tre casi.

1°. L'equazione è spuria $a\,x^2+b\,x=0$

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo x a fattore comune $x(ax+b)=0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x=0 \;\vee\; ax+b=0\rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$. Chiamiamo le due radici x_1 e x_2. Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo grado, poniamo separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori, come nel grafico a fianco. Le soluzioni saranno



- $x<x_1\vee x>x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x>0$, analogamente $x\leq x_1\vee x\geq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\geq 0$.
- $x_1<x<x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x<0$, analogamente $x_1\leq x\leq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\leq 0$.

Esempi

- ■ $3x^2-2x>0$ mettiamo x a fattore comune $x(3x-2)>0$ soluzioni $x<0\vee x>\dfrac{2}{3}$
- ■ $5x^2+x\leq 0$ mettiamo x a fattore comune $x(5x+1)>0$ soluzioni $-\dfrac{1}{5}\leq x\leq 0$
- ■ $x-3x^2>0$ cambiamo di segno $3x^2+x<0$ da cui $x(3x+1)>0$ soluzioni $-\dfrac{1}{3}\leq x\leq 0$

2°. L'equazione è pura: $ax^2+c=0$

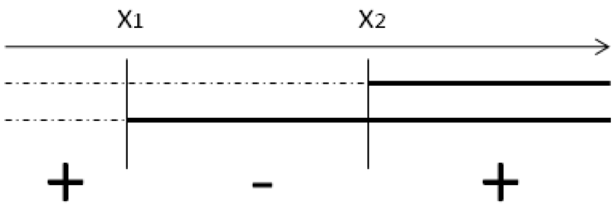
Possono esserci due situazioni:

- c<0, in questo caso l'equazione ammette due radici opposte: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$: si torna al caso precedente e si ha $x<x_1\vee x>x_2$ se la disequazione è $ax^2+c>0$ oppure $x<x_1<x_2$ se la disequazione è $ax^2+c<0$
- c>0: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio ax^2+c è la somma di un quadrato più un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza la disequazione $ax^2+c>0$ avrà soluzioni per ogni x reale, mentre $ax^2+c<0$ non avrà nessuna soluzione reale.

Esempi

- ■ $x^2-4\geq 0$ soluzioni $x\leq -2\vee x\geq 2$
- ■ $x^2-9\leq 0$ soluzioni $-3\leq x\leq 3$
- ■ $x^2+4>0$ soluzioni $\forall\, x\in\mathbb{R}$
- ■ $x^2+9\leq 0$ soluzioni nessuna valore reale.
- ■ $1-x^2<0$ cambiamo segno $x^2-1<0$ soluzioni $-1\leq x\leq 1$

3°. L'equazione è completa: $ax^2+bx+c=0$. Si calcola il valore del discriminante $\Delta=b^2-4ac$.
A seconda del suo segno possono presentarsi tre casi:
Primo caso $\Delta>0$ l'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in $a(x-x_1)(x-x_2)$. Poiché abbiamo supposto *a* è positivo il segno del trinomio è dato da



Per cui la disequazione $ax^2+bx+c\geq 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$; mentre la disequazione $ax^2+bx+c\leq 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1\leq x\leq x_2$.

Esempi

- $x^2-3x-4>0$; soluzioni dell'equazione associata $x_1=-1 \vee x_2=4$. Soluzioni della disequazione : $x<-1 \vee x>4$.
- $x^2-3x-4<0$, in questo caso le soluzioni della disequazione saranno $-1<x<4$.

Secondo caso $\Delta=0$ in questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1=x_2$, pertanto il trinomio si scompone in $a(x-x_1)^2$. Poiché a è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

i. $a(x-x_1)^2>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq x_1$;
ii. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$;
iii. $a(x-x_1)^2<0$ non è mai verificata;
iv. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata solo per $x=x_1$;

Esempi

- $x^2-2x+1>0 \rightarrow (x-1)^2>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq 1$
- $4x^2-4x+1\geq 0 \rightarrow (2x-1)^2\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2+2x+1<0 \rightarrow (x+1)^2<0$ nessuna soluzione
- $4x^2+4x+1\leq 0 \rightarrow (2x+1)^2\leq 0$ unica soluzione $x=-\frac{1}{2}$.

Terzo caso $\Delta<0$ studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi: mettiamo il coefficiente *a* a fattore comune, aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ si ha $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$. Osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore, si ha $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Studiamo ora il segno di questa espressione: a è sempre > 0, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ essendo un quadrato è sempre maggiore > 0; mentre $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-\frac{\Delta}{4a^2}$ è sempre positivo perché $\Delta<0$. Concludendo il trinomio è sempre positivo. Si hanno allora le seguenti possibilità

1. $ax^2+bx+c>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$;
2. $ax^2+bx+c\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$;
3. $ax^2+bx+c<0$ soluzioni per nessun valore reale di x;
4. $ax^2+bx+c\leq 0$ soluzioni per nessun valore reale di x;

Esempi

- $2x^2-3x+4>0 \rightarrow \Delta=9-32=-23<0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2-x+1<0 \rightarrow \Delta=1-4=-3<0$ per nessun valore reale di x

Esempi

- $2x^2+3x-1>0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2+3x-1=0$ calcoliamo il delta: $\Delta=9+8=17$ positivo

2° passo: calcoliamo le soluzioni: $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

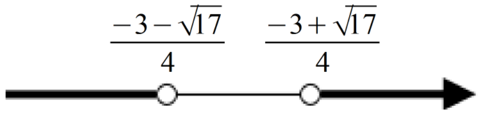
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2+3x-1=2\cdot\left(x-\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l'insieme soluzione della disequazione



5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x>\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere la disequazione $2x^2+3x-1<0$ e i casi $2x^2+3x-1\geq 0$; $2x^2+3x-1\leq 0$.

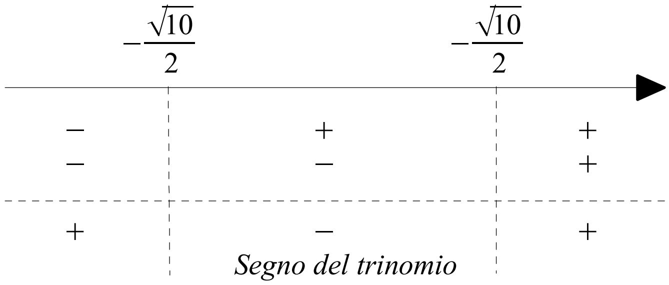
- $2x^2-5\leq 0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2-5=0$, calcoliamo il delta $\Delta=0+40=40>0$

2° passo: determiniamo le soluzioni: $x_1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2=+\frac{\sqrt{10}}{2}$

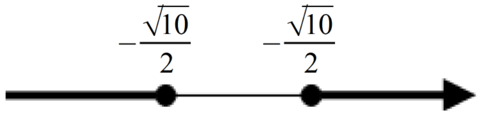
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2-5=2\cdot\left(x+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l'insieme soluzione della disequazione



5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{10}}{2}\leq x\leq +\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



■ $-3x^2+2x>0$

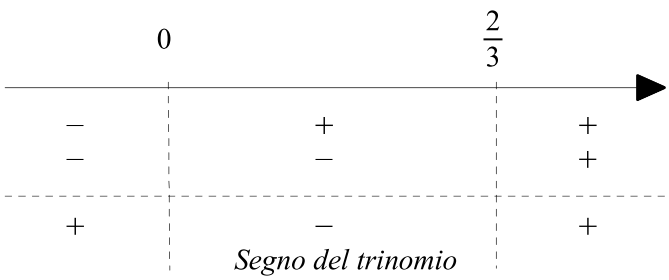
L'equazione è equivalente a $3x^2-2x<0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $3x^2-2x=0$ e calcoliamo il delta: $\Delta=4+0=4>0$

2° passo: calcoliamo le soluzioni dell'equazione $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$

3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $3x^2-2x=3\cdot x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e deduciamo l'insieme soluzione della disequazione



5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<\frac{2}{3}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



In generale, data la disequazione $ax^2+bx+c>0$ o $ax^2+bx+c<0$ dopo aver scomposto in fattori il trinomio si ha:

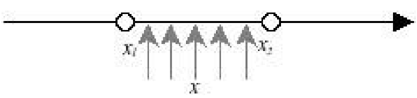


$x<x_1$

$x-x_1<0 \wedge x-x_2<0$

$a(x-x_1)(x-x_2)>0$

$ax^2+bx+c>0$



$x_1<x<x_2$

$x-x_1>0 \wedge x-x_2<0$

$a(x-x_1)(x-x_2)<0$

$ax^2+bx+c<0$



$x>x_2$

$x-x_1>0 \wedge x-x_2>0$

$a(x-x_1)(x-x_2)>0$

$ax^2+bx+c>0$

►2. Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Ricordiamo alcune definizioni.

Un polinomio in una sola variabile, solitamente indicata con x, è di **secondo grado** se **2 è il massimo esponente della variabile**.

Per **trinomio di secondo grado** intendiamo un polinomio di secondo grado: ax^2+bx+c con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$

Chiamiamo **zeri del trinomio** i valori reali soluzione dell'equazione associata $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$.

DEFINIZIONE. Una funzione che associa ad ogni numero reale x il numero reale $y=ax^2+bx+c$ con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$ si chiama **funzione polinomiale di secondo grado**.

Nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $y=ax^2+bx+c$; se x_1 e x_2 sono gli zeri reali del trinomio ax^2+bx+c allora attribuendo tali valori alla variabile *x* si ha $y=0$; essi sono dunque **gli zeri della funzione**, ossia le ascisse dei punti del grafico appartenenti all'asse *x*.

Esempi

■ Determinate gli zeri del trinomio x^2+x-2 .

Risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$. I due numeri 1 e –2 sono gli zeri della funzione; $y=x^2+x-2$. Nel riferimento cartesiano ortogonale i punti $P_1(-2;0)$ e $P_2(1;0)$ sono i punti del grafico della funzione appartenenti all'asse x.

■ Determinare gli zeri del trinomio x^2-4x+4 .

Risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$ gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 e il grafico della funzione $y=x^2-4x+4$ ha due punti coincidenti appartenenti all'asse *x*: $P_1\equiv P_2(2;0)$.

■ Determinare gli zeri del trinomio x^2-2x+7 .

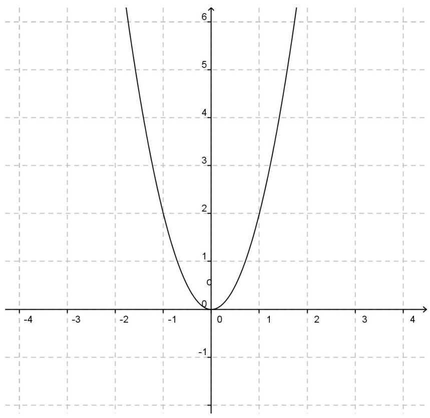
Risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali e il grafico della funzione $y=x^2-2x+7$ non ha punti appartenenti all'asse *x*.

Questi esempi ci hanno permesso di chiarire il collegamento tra il concetto algebrico "zeri di un polinomio" e il concetto geometrico di "punti sull'asse delle ascisse" del grafico della funzione polinomiale di secondo grado. Pertanto **studiare il segno di un trinomio di secondo grado equivale a determinare quali sono le ascisse dei punti della funzione** $y=ax^2+bx+c$ (con $a\in\mathbb{R}_{0,}$ $b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$) **che hanno ordinata > 0 oppure ordinata < 0, oppure ordinata ≥ 0, oppure ordinata ≤ 0**.

Ricordiamo che nel riferimento cartesiano ortogonale i punti ad ordinata positiva si trovano nel I e nel II quadrante (al di sopra dell'asse x), i punti ad ordinata negativa si trovano nel III e nel IV quadrante (al di sotto dell'asse x), i punti ad ordinata nulla si trovano sull'asse x.

Per studiare il segno del trinomio, dobbiamo tracciare nel riferimento cartesiano il grafico della funzione $y=ax^2+bx+c$ (con $a\in\mathbb{R}_{0,}$ $b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$) e lo faremo riprendendo il grafico della funzione di proporzionalità quadratica esaminata nel volume di Algebra 1.

Esempi



■ Tracciare nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione $y=2x^2$.

Sappiamo che $D\equiv R$. Poiché il coefficiente della variabile indipendente è positivo si ha $\mathrm{IM}=R^{+}\cup\{0\}$ e la parabola volge la concavità verso l'alto; il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. Per la costruzione richiesta compilate la tabella:

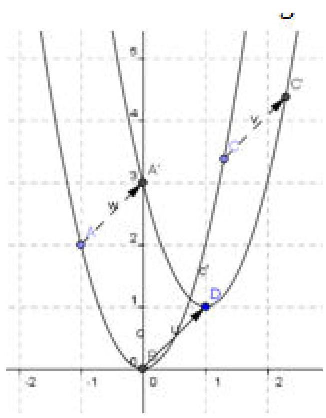
$y=2x^2$	*x*	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
	y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

e segnate i punti nel riferimento cartesiano.

Applicare ai punti della tabella la traslazione di vettore $\vec{v}(1;1)$; compilare la nuova tabella dei punti corrispondenti, riportateli nel riferimento cartesiano e tracciate la curva immagine della parabola.

$y=2x^2$	*x*	-0,5	0	0,5				
$\vec{v}(1;1)$	*y*	5,5	...	...				

Dal grafico possiamo leggere le seguenti informazioni:



- l'immagine della parabola iniziale *c*, è ancora una parabola *c'* essendo la traslazione una isometria;
- la parabola *c'* volge la concavità verso l'alto, come la parabola iniziale *c;*
- il vertice $O(0;0)$ della parabola *c* ha come immagine il vertice $D(1;1)$ della parabola *c'* , che coincide con l'estremo libero del vettore che definisce la traslazione;
- il vettore che individua la traslazione è indicato nella figura con u; v e w rappresentano lo stesso vettore applicato a due punti presi a caso sulla parabola iniziale;
- la parabola *c'* è rappresentata dalla funzione $y=2x^2-4x+3$ che è una funzione di secondo grado avente il primo coefficiente uguale a quello della parabola c.

Come possiamo determinare l'equazione della parabola immagine di $y=2x^2$ applicando la traslazione $TR(1,1)$?

La traslazione è rappresentata da $TR(1;1):\begin{cases}x'=x+1\\y'=y+1\end{cases}$ che esprime il legame algebrico tra le coordinate di un punto della parabola c e il punto corrispondente su c'.

Riscriviamo l'equazione della traslazione $\begin{cases}x=x'-1\\y=y'-1\end{cases}$ e sostituiamo nell'equazione di *c*: $(y'-1)=2\cdot(x'-1)^2$ da cui svolgendo i calcoli $y'=2x^2-4x+3$.

Generalizziamo

Applicando alla funzione di proporzionalità quadratica $y=ax^2$ con $a\neq 0$ una traslazione di vettore $\vec{v}(v_x;v_y)$ si ottiene la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, i cui coefficienti *b* e *c* dipendono dalle coordinate del vettore $\vec{v}$.

Infatti, dall'equazione della traslazione $TR(v_x;v_y):\begin{cases}x'=x+v_x\\y'=y+v_y\end{cases}$ otteniamo $\begin{cases}x=x'-v_x\\y=y'-v_y\end{cases}$ che sostituiamo nell'equazione $y=ax^2$ per ottenere l'equazione della curva immagine : $(y'-v_y)=a\cdot(x'-v_x)^2$. Svolti i calcoli, si ottiene: $y'=a(x')^2-(2av_x)x'+a(v_x)^2+v_y$ in cui ponendo $-2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ si ottiene l'equazione della parabola *c'* immagine di quella data: $y=ax^2+bx+c$, espressa attraverso un trinomio di secondo grado.

Viceversa

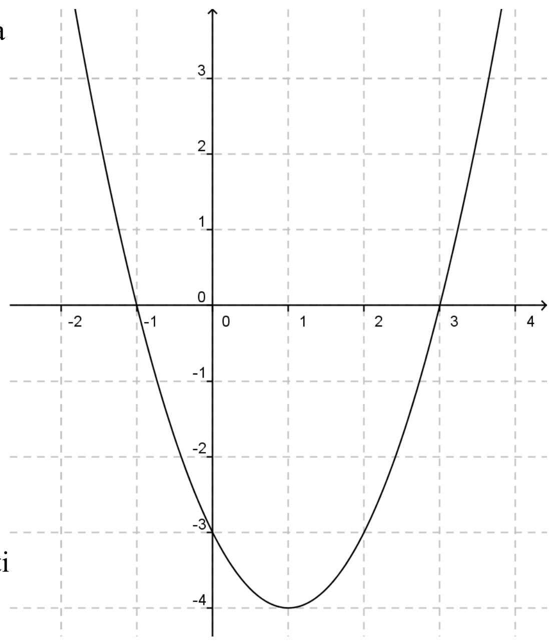
Assegnata la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, come possiamo rappresentarla nel riferimento cartesiano?

Sapendo che il grafico di tale curva è una parabola

- il coefficiente a indica la concavità: verso l'alto se $a>0$, verso il basso se $a<0$
- dalle formule $-2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ ricaviamo le coordinate del suo vertice $v_x=-\frac{b}{2a}$ e $v_y=c-a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$
- risolvendo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ determiniamo gli eventuali punti di intersezione con l'asse x.
- assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari, possiamo ottenere altri punti del grafico

Esempio

Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione *f*: $y=x^2-2x-3$



Strategia risolutiva

Il grafico di tale curva è una parabola; essendo il coefficiente $a=1$, la concavità è verso l'alto;

essendo $b=-2$ e $c=-3$ si ha

$v_x=-\frac{-2}{2}=1$ e $v_y=\frac{-12-4}{4}=-4\rightarrow V(1;-4)$;

possiamo affermare che f è l'immagine di $y=x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1;-4)$

Compilate la tabella

x	0	$x_1=\dots\dots\dots \vee x_2=\dots\dots\dots$	2
y	……	0	…..

e confrontate il vostro grafico con quello qui tracciato in cui sono evidenziati il vertice $A(1;-4)$, i punti $B(3;0)$ e $C(-1;0)$ di intersezione con l'asse x.

Rappresentare nel riferimento cartesiano ortogonale le seguenti parabole.

1 $y=-3x^2+x$

2 $y=\frac{1}{2}x-2x+\frac{3}{2}$

3 $y=x^2+x-1$

4 $y=x^2-x+1$

5 $y=-3x^2+3$

6 $y=x^2+4x+3$

7 $y=x^2+\frac{3}{5}$

8 $y=-\frac{2}{5}x^2+4x-\frac{1}{5}$

9 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x-1$

Ci proponiamo ora di determinare il segno di un qualunque trinomio di secondo grado, procedendo per via grafica.

<u>Esempio</u>

Studiamo il segno del trinomio x^2-2x-3 ; questo significa stabilire per quali valori di x esso assume segno positivo, per quali segno negativo e per quali eventualmente si annulla. La richiesta è interpretabile anche come la ricerca degli insiemi soluzioni dell'equazione $x^2-2x-3=0$ e delle disequazioni $x^2-2x-3>0$ e $x^2-2x-3<0$.

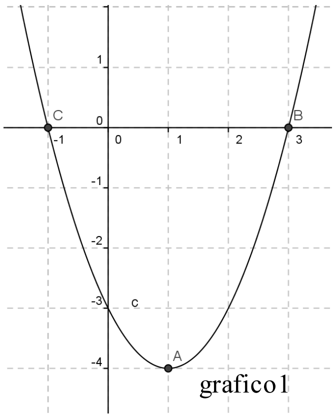


grafico1

Strategia risolutiva:

Tracciamo il grafico della funzione $y=x^2-2x-3$ e leggiamo dal grafico gli insiemi richiesti:

- Le ascisse dei punti B e C costituiscono l'insieme soluzione dell'equazione $x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-1 \vee x_2=3$
- I valori di x dell'insieme $H=\{x\in\mathbb{R} \mid x_C<x<x_B\}$ rendono il trinomio negativo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=0$, il punto sulla parabola ha ordinata negativa (-3) . Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=1,\ x=\frac{3}{2},\ x=2$
- I valori di x dell'insieme $K=\{x\in\mathbb{R} \mid x<x_C \vee x>x_B\}$ rendono il trinomio positivo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=\frac{7}{2}$, il punto sulla parabola ha ordinata positiva. Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=-1,2$.

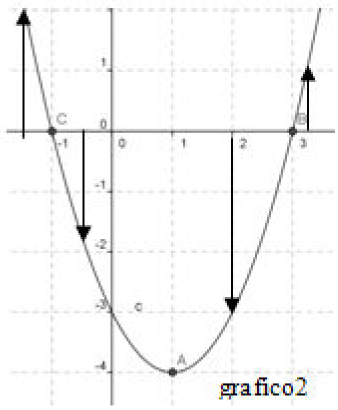
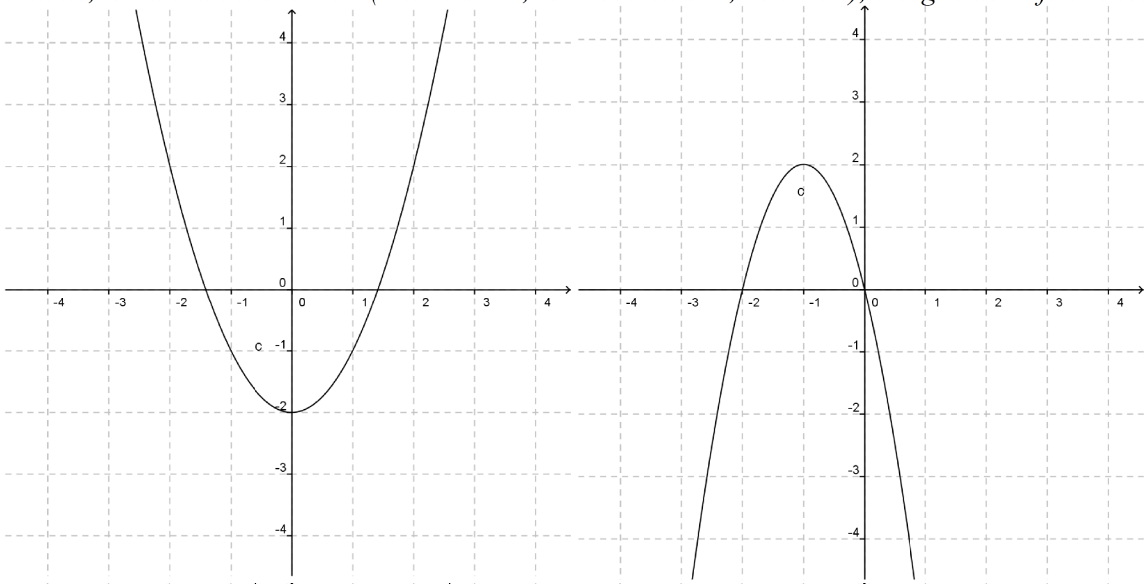
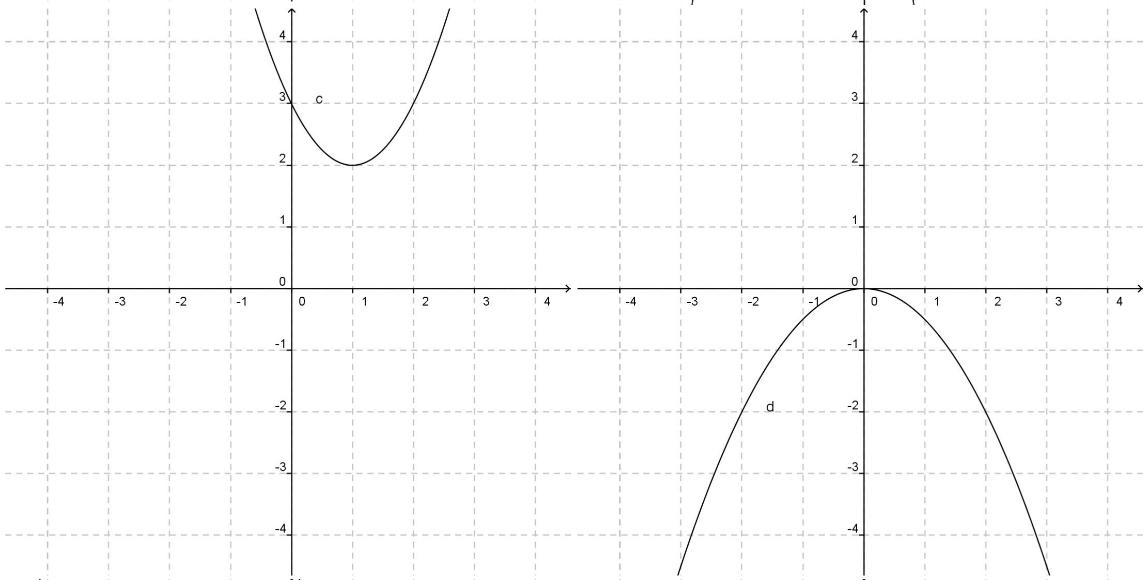
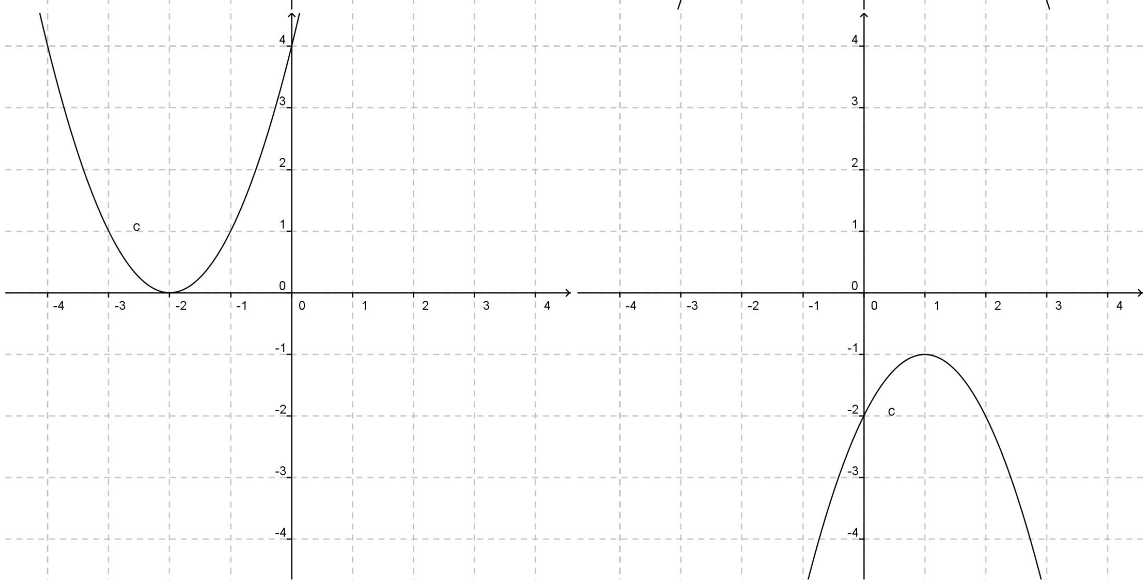


grafico2

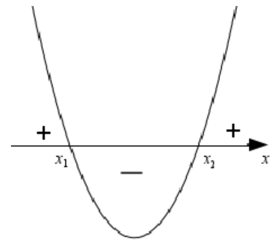
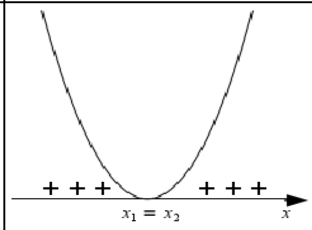
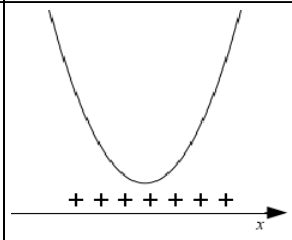
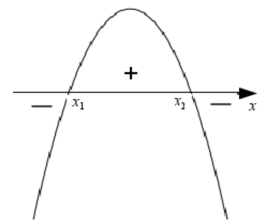
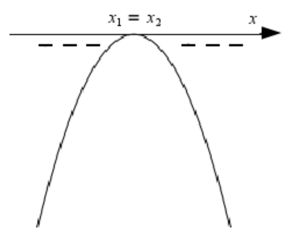
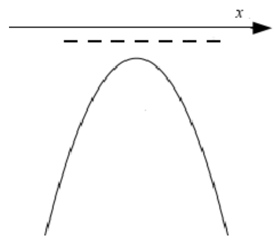
Per ciascun grafico di parabola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ *indica il segno del primo coefficiente e del discriminante, la natura dei suoi zeri (reali distinti, reali coincidenti, non reali), il segno della funzione:*

10


11


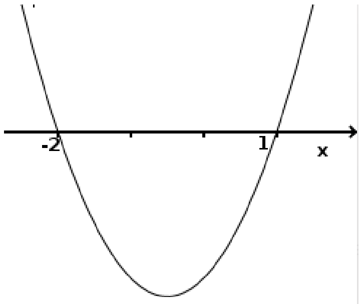
12


Osservazione conclusiva: la ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado è sempre interpretabile come la ricerca del segno di un trinomio e quindi risolubile per via grafica.
In questi casi non è necessario rappresentare in modo preciso la parabola associata al trinomio, ma basta ricordare quanto detto inizialmente sugli zeri di una funzione.

Tabella riassuntiva per la risoluzione delle disequazioni di secondo grado			
$a>0$			
$\Delta=b^2-4ac$	parabola	segno	Insieme soluzione
$\Delta>0$ soluzioni reali distinte		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1 \vee x=x_2$ (x_1, x_2, x)
		$ax^2+bx+c>0$	(x_1, x_2, x)
		$ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$ (x_1, x_2, x)
$\Delta=0$ soluzioni reali coincidenti		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1=x_2$ ($x_1=x_2$, x)
		$ax^2+bx+c>0$	($x_1=x_2$, x)
		$ax^2+bx+c<0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
$\Delta<0$ soluzioni non reali		$ax^2+bx+c=0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
		$ax^2+bx+c>0$	$x\in\mathbb{R}$ *tutti i numeri reali*
		$ax^2+bx+c<0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
$a<0$			
$\Delta>0$ soluzioni reali distinte		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1 \vee x=x_2$ (x_1, x_2, x)
		$ax^2+bx+c>0$	$x_1<x<x_2$ (x_1, x_2, x)
		$ax^2+bx+c<0$	(x_1, x_2, x)
$\Delta=0$ soluzioni reali coincidenti		$ax^2+bx+c=0$	($x_1=x_2$, x)
		$ax^2+bx+c>0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
		$ax^2+bx+c<0$	($x_1=x_2$, x)
$\Delta<0$ soluzioni non reali		$ax^2+bx+c=0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
		$ax^2+bx+c>0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ (x)
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in\mathbb{R}$ *tutti i numeri reali*

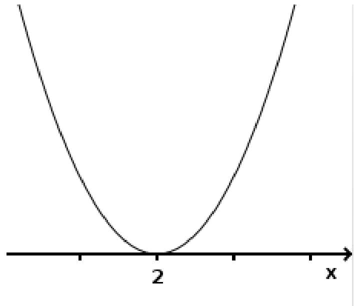
Esempi

■ $x^2+x-2>0$



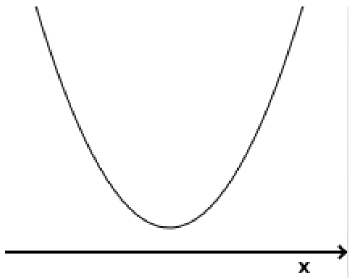
Risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$. I due numeri 1 e -2 sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione $y=x^2+x-2$; la parabola volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione rispetto all'asse x e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee x>1\}$ o con notazione insiemistica $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

■ $x^2-4x+4\leq 0$



Risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$: gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 , la parabola $y=x^2-4x+4$ ha il vertice sull'asse x e volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$ nessun valore reale rende il trinomio negativo.

■ $x^2-2x+7>0$



Risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali, la parabola $y=x^2-2x+7$ volge la concavità verso l'alto e non ha punti appartenenti all'asse x quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\mathbb{R}$

Risolvere le disequazioni di secondo grado, collocando le rispettive parabole grossolanamente rispetto all'asse x, come fatto negli esempi:

13 $2x^2+3x-1<0$

14 $x^2-5x+6\leq 0$

15 $x^2-3x-4>0$

16 $x^2-6x+5\geq 0$

17 $6x^2+x-2>0$

18 $15x^2+x-6\leq 0$

19 $-x^2+1\geq 0$

20 $x^2-\frac{1}{4}>0$

21 $x^2-\frac{1}{4}x\leq 0$

22 $x^2+2x\leq 0$

23 $x^2+2x+1\leq 0$

24 $x^2+x+1<0$

Negli esercizi che seguono si tenga quindi presente che un trinomio di secondo grado, con il coefficiente di x^2 positivo, assume segno positivo per le x appartenenti agli intervalli esterni alle radici e valore negativo per x appartenente all'intervallo interno.

25 $x^2-6x\le 0$ $\quad 5x^2>0$ R. $0\le x\le 6$ R. $x\ne 0$

26 $x^2-x>0$ $\quad x^2\le 0$ R. $x<-1 \vee x>0$ R. $x=0$

27 $3x^2\le -1$ $\quad x^2-9>0$ R. $\emptyset$ R. $x_1<-3 \vee x>3$

28 $2x^2-3x+1>0$ $\quad -x^2+3x\ge 0$ R. $x<\frac{1}{2} \vee x>1$ R. $0\le x\le 3$

29 $3x^2+x-2>0$ $\quad x^2-4>0$ R. $x_1<-1 \vee x>\frac{2}{3}$ R. $x_1<-2 \vee x>2$

30 $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1<0$ $\quad x^2-8\le 0$ R. $-\frac{3}{4}<x<1$ R. $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$

31 $x^2-5x+3\ge 0$ $\quad x^2-4x+9>0$ R. $x\le\frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x\ge\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ R. $\mathbb{R}$

32 $x^2-6x+8\le 0$ $\quad x^2+3x-4\ge 0$ R. $2\le x\le 4$ R. $x\le -4 \vee x\ge 1$

33 $x^2-4x-9\le 0$ $\quad x^2-9x+18<0$ R. $2-\sqrt{13}\le x\le 2+\sqrt{13}$ R. $3<x<6$

34 $x^2-8x+15\ge 0$ $\quad -2x^2\ge 0$ R. $x\le 3 \vee x\ge 5$ R. $x=0$

35 $3x^2-\frac{2}{3}x-1\le 0$ $\quad x^2+5>0$ R. $\frac{1-2\sqrt{7}}{9}\le x\le\frac{1+2\sqrt{7}}{9}$ R. $\mathbb{R}$

36 $x^2+6x-2>0$ $\quad 2x^2+5x+4\le 0$ R. $\left[x<-3-\sqrt{11} \vee x>-3+\sqrt{11}\right]$ R. $\emptyset$

37 $x^2-3x-\frac{5}{2}<0$ $\quad x^2+1>0$ R. $x<\frac{3-\sqrt{19}}{2} \vee x>\frac{3+\sqrt{19}}{2}$ R. $\mathbb{R}$

38 $-x^2+5\le 0$ $\quad x^2+x\ge 0$ R. $x\le -\sqrt{5} \vee x\ge\sqrt{5}$ R. $x\le -1 \vee x\ge 0$

39 $(x+1)^2\ge 0$ $\quad x^2>1$ R. $\mathbb{R}$ R. $x<-1 \vee x>1$

40 $2x^2-6<0$ $\quad -x^2-1\le 0$ R. $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ R. $\mathbb{R}$

41 $9-4x^2\le 0$ $\quad 3x-2x^2>0$ R. $x\le -\frac{3}{2} \vee x\ge\frac{3}{2}$ R. $0<x<\frac{3}{2}$

42 $x^2\ge 0$ $\quad 2x^2+4>0$ R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}$

43 $x^2-x-2>0$ $\quad x^2+11x+30\le 0$ R. $x<-1 \vee x>2$ R. $-6\le x\le -5$

44 $-x^2+4x+3>0$ $\quad x^2+4x+4<0$ R. $2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$ R. $\emptyset$

45 $x^2-x+1<0$ $\quad x^2-\frac{1}{9}\ge 0$ R. $\emptyset$ R. $x\le -\frac{1}{3} \vee x\ge\frac{1}{3}$

46 $9x^2+3x-2\le 0$ $\quad 2x^2+5<0$ R. $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{1}{3}$ R. $\emptyset$

47 $4x-x^2\ge 0$ $\quad 9x^2+10x+1\le 0$ R. $0\le x\le 4$ R. $-1\le x<-\frac{1}{9}$

48 $0{,}01x^2-1>0$ $\quad 1{,}\bar{6}x^2-2x\le 0$ R. $x<-10 \vee x>10$ R. $0\le x<\frac{6}{5}$

49 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}>0$ $\quad 4x^2+\frac{5}{3}x-1\le 0$ R. $x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{2}$ R. $-\frac{3}{4}\le x\le\frac{1}{3}$

50 $x^2+x+\sqrt{2}>0$ $\quad x^2+2\sqrt{2}x+2>0$ R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}-\{\sqrt{2}\}$

51 $12x^2-3\ge 4x(2x-1)$ R. $x\le -\frac{3}{2} \vee x\ge\frac{1}{2}$

52 $2x^2-11x-6\ge 0$ R. $-\frac{1}{2}\le x\le 6$

53 $(3x+1)^2>(2x-1)^2$ R. $x<-2 \vee x>0$

54 $(x+1)(x-1)^2>x^3$ R. $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

55 $(x+3)(x+2)<-(x+2)^2$ R. $-\frac{5}{2}<x<-2$

56 $\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{4}>x^2-1$ R. $-1<x<\frac{5}{3}$

57 $(x+1)^3-(x+2)^2>\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x<\frac{1-\sqrt{21}}{4} \vee x>\frac{1+\sqrt{21}}{4}$

58 $(x-2)(3-2x)\geq x-2$ R. $1\leq x\leq 2$

59 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)\leq 2x-1$ R. $-\frac{7}{6}\leq x\leq -1$

60 $\frac{x^2+16}{4}+x-1<\frac{x-3}{2}$ R. $\emptyset$

61 $\frac{3x-2}{2}<x^2-2$ R. $x\leq -\frac{1}{2} \vee x\geq 2$

62 $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}<1+x$ R. $\mathbb{R}$

63 $(x+4)^2+8\geq\frac{x-1}{3}$ R. $\mathbb{R}$

64 $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2\leq(x+1)^2$ R. $x\leq -\frac{8}{5} \vee x\geq -\frac{4}{7}$

65 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)>x^3-\frac{x}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{27}$ R. $I.S.=\left\{x\in R \mid x<\frac{2}{3} \vee x>\frac{7}{9}\right\}$

66 $3x-5+(1-3x)^2>(x-2)(x+2)$ R. $x<0 \vee x>\frac{3}{8}$

67 $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2>x$ R. $-\frac{29}{27}<x<-1$

68 $(x-4)i2+(2-x)^2-2(2x+17)>4(x+5)(3-x)+(x+1)^2$ R. $x<-3 \vee x>5$

69 $(x-2)^3-x^3>x^2-4$ R. $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}<x<\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

70 $(2-x)^3-(2-x)^2<\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

71 $(x+200)^2+x+200<2$ R. $-202<x<-199$

72 $\frac{(2x-1)^3-8x}{2}-\frac{(2x+1)^2-15}{4}\leq 4x(x-1)^2-6$

73 $\frac{(3-x)^2}{2}-1\geq -\frac{x^2-4}{4}$ R. $x\leq 2-\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x\geq 2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

74 $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-2x>\frac{5}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

75 $(x+1)^2>(x-1)^2+(x+2)^2+4x$ R. $I.S.=\emptyset$

76 $\frac{x^2}{4}+x<\frac{x+3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1-\frac{x}{2}}{2}$ R. $-1<x<1$

Scegliete la risposta esatta tra quelle proposte

77 Il monomio $16x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>16$ [B] $x>\frac{1}{16}$ [C] $x<-4 \vee x>16$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x\in\mathbb{R}_0$

78 Il binomio $16+x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

79 il binomio $16-x^2$ risulta positivo per:

[A] $x<-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

80 Spiegate sfruttando il metodo grafico la verità della proposizione: “nessun valore della variabile a rende il polinomio $(3+a)^2-(2a+1)\cdot(2a-1)-(a^2+2a+35)$ positivo”.

►3. Segno del trinomio a coefficienti letterali

Consideriamo il trinomio $t=k\,x^2+3\,x-7$ di secondo grado avente il primo coefficiente dipendente dal parametro *k*. Come possiamo stabilire il segno di questo trinomio, al variare di *k*?
Sappiamo che stabilire il segno di un trinomio significa determinare i valori reali che attribuiti alla variabile indipendente x rendono il trinomio positivo, nullo o negativo. Evidentemente per ogni valore reale di k avremo una diversa disequazione da risolvere; dobbiamo dunque cercare di analizzare come varia il trinomio a seconda dei valori di *k* e in seguito studiare il segno del trinomio ottenuto. Questa analisi di situazioni diverse è la **discussione del trinomio a coefficienti parametrici**.

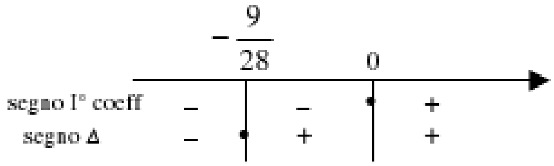
Esempio

Stabilire il segno di $t=k\,x^2+3\,x-7$ al variare di *k*.

- 1° passo: prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $k\,x^2+3\,x-7=0$ e stabiliamo il loro segno:

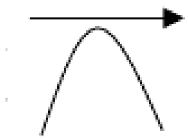
I° coefficiente ≥ 0 per k ≥ 0

$\Delta=9+28k\geq 0$ per $k\geq -\frac{9}{28}$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:

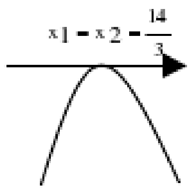


- 2° passo: analizziamo i valori del parametro nei vari intervalli determinati:

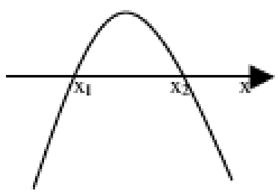
$k<-\frac{9}{28}$: Il primo coefficiente è negativo così come il Δ , la parabola volge la concavità verso il basso e non ha zeri reali: il trinomio è negativo per qualunque valore reale di x.



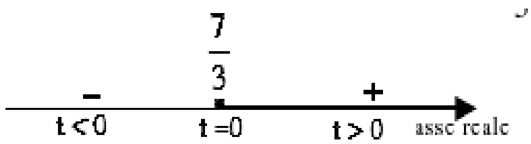
$k=-\frac{9}{28}$ Il primo coefficiente è negativo e $\Delta=0$ .La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=\frac{14}{3}$: il trinomio si annulla per $x=\frac{14}{3}$ mentre per qualunque altro valore di x è negativo.



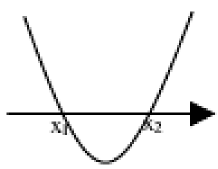
$-\frac{9}{28}<k<0$ Il primo coefficiente è negativo e Δ positivo. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali distinti: il trinomio si annulla per $x=x_1 \vee x=x_2$; è positivo per $x_1<x<x_2$; è negativo per $x<x_1 \vee x>x_2$



$k=0$ il trinomio diventa un binomio di primo grado: $t=3\,x-7$ e quindi $t>0$ per $x>\frac{7}{3}$, $t<0$ per $x<\frac{7}{3}$, $t=0$ per $x=\frac{7}{3}$.



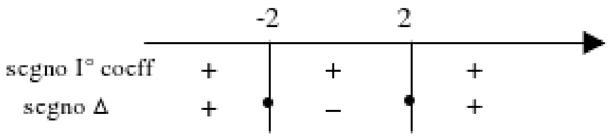
$k>0$ Il primo coefficiente è positivo così come il Δ . La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: **il trinomio si annulla per** $x=x_1 \vee x=x_2$ **; è negativo per** $x_1<x<x_2$ **; è positivo per** $x<x_1 \vee x>x_2$



Esempio

Stabilite al variare del parametro *k* l'*I.S.* della disequazione $x^2+k\,x+1<0$

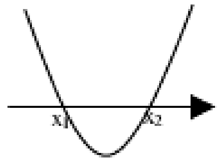
Prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $x^2+k\,x+1=0$ e stabiliamo il loro segno:



I° coefficiente: indipendente dal parametro e sempre positivo.

$\Delta=k^2-4\geq 0$ per $k\leq -2 \vee k\geq 2$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:

- $k<-2 \vee k>2$ primo coefficiente. positivo e Δ positivo. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: $x=x_1 \vee x=x_2$; il trinomio è negativo per $x_1<x<x_2$.



- $-2<k<2$ primo coefficiente positivo, Δ negativo. La parabola volge la concavità verso l'alto e non ha zeri reali: il trinomio è positivo per ogni valore reale di x.
- $k=-2 \vee k=2$ Primo coefficiente positivo e Δ =0. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha un unico zero reale: il trinomio si annulla per $x=x_1$; è positivo $\forall x\in\mathbb{R}-\{x_1\}$.

Risolvi e discuti le seguenti disequazioni

81 $x^2-2kx+k^2-1>0$ R. $x<k-1 \vee x>k+1$

82 $3x^2-5ax-2a^2<0$ R. $\begin{cases} a=0\rightarrow impos. \\ a>0\rightarrow -\frac{1}{3}a<x<2a \\ a<0\rightarrow 2a<x<-\frac{1}{3}a \end{cases}$

83 $4x^2-4x+1-9m^2<0$ R. $\begin{cases} m=0\rightarrow impos. \\ m>0\rightarrow \frac{1-3m}{2}<x<\frac{1+3m}{2} \\ m<0\rightarrow \frac{1+3m}{2}<x<\frac{1-3m}{2} \end{cases}$

84 $2x^2-3ax<0$ R. $\begin{cases} a=0\rightarrow I.S.=\emptyset \\ a>0\rightarrow 0<x<\frac{3}{2}a \\ a<0\rightarrow \frac{3}{2}a<x<0 \end{cases}$

85 $x^2-2tx-8t^2>0$ R. $\begin{cases} t=0\rightarrow x\neq 0 \\ t>0\rightarrow -2t<x<4t \\ t<0\rightarrow 4t<x<-2t \end{cases}$

86 $(1-s)x^2+9>0$ R. $\begin{cases} s\leq 1\rightarrow I.S.=\mathbb{R} \\ s>1\rightarrow \frac{-3}{\sqrt{k-1}}<x<\frac{3}{\sqrt{k-1}} \end{cases}$

87 $(m-1)x^2-mx>0$ R. $\begin{cases} m=0\rightarrow I.S.=\emptyset \\ m=1\rightarrow x<0 \\ 0<m<1\rightarrow \frac{m}{m-1}<x<0 \\ m<0\rightarrow 0<x<\frac{m}{m-1} \\ m>1\rightarrow x<0 \vee x>\frac{m}{m-1} \end{cases}$

88 $kx^2-(k+1)x-3\geq 0$

89 Determinare al variare del parametro m il segno del trinomio $t=(1-m)x^2-2mx-m+3$.

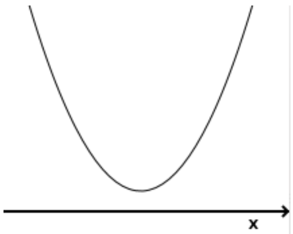
►4. Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

Una disequazione polinomiale si presenta in una delle seguenti forme: $p(x)\le 0$ oppure $p(x)<0$ oppure $p(x)\ge 0$ oppure $p(x)>0$, dove $p(x)$ è un polinomio nella sola variabile *x*.

Esempi

- *Un numero è tale che sottraendo al suo cubo il suo triplo si ottiene un numero maggiore del triplo del suo quadrato aumentato di 4. Determinare l'Insieme Soluzioni del problema.*

La richiesta del problema implica la ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione della disequazione $x^3-3x>3x^2+4$, di terzo grado nella variabile *x*. Scriviamo la disequazione in forma canonica, applicando i principi di equivalenza: $x^3-3x^2-3x-4>0$. Si tratta di una disequazione polinomiale di terzo grado.
Procediamo nella ricerca della scomposizione in fattori del polinomio $p(x)=x^3-3x^2-3x-4$.
Mediante la regola di Ruffini possiamo determinare un suo zero $x=4$ e dunque ottenere
$p(x)=x^3-3x^2-3x-4=(x-4)(x^2+x+1)$.
Determiniamo il segno dei singoli fattori: primo fattore $f_1>0 \rightarrow x>4$; secondo fattore
$f_2>0 \rightarrow x^2+x+1>0$ disequazione di secondo grado, I° coefficiente positivo e $\Delta=1-4=-3$ negativo; la parabola è del tipo rappresentato in figura e dunque il secondo fattore è positivo per qualunque valore reale di x. Costruiamo la tabella dei segni:



x		4	
Segno f_1	−		+
Segno f_2	+		+
Segno p	−		+

$I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>4\}=(4;+\infty)$; il problema ha dunque infinite soluzioni.

- Determinate l'*I.S.* della disequazione $-2x(3-2x)-3x^2\left(2-\frac{5}{2}x\right)\ge 5\left(2x^2-\frac{3}{10}x\right)$

Osserviamo che la disequazione proposta è polinomiale e di grado 3; eseguiamo i calcoli per portarla alla forma $p(x)\ge 0$. Eseguendo i calcoli e applicando i principi di equivalenza verificare che si ottiene $3x^3-8x^2-3x\ge 0$.
Scomporre in fattori il polinomio $p(x)=3x^3-8x^2-3x=x\cdot(3x^2-8x-3)$
determinare il segno dei singoli fattori e costruire la tabella dei segni:

x				
Segno f_1				
Segno f_2				
Segno p				

Verificare che si ottiene $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{3}\le x\le 0 \vee x\ge 3\right\}$

90 Verificare che nessun numero naturale appartiene all'Insieme Soluzione della disequazione: $(x^2-x)\cdot(2x^2+13x+20)<0$; c'è qualche numero intero nell'*I.S.*? È vero che l'*I.S.* è formato dall'unione di due intervalli aperti di numeri reali?

91 Dopo aver scomposto in fattori il polinomio $p(x)=2x^4-5x^3+5x-2$ determinare il suo segno.

92 Stabilire se esiste almeno un numero naturale che renda negativo il trinomio $p(x)=9x^2+x^4-10$.

93 Nell'insieme dei valori reali che rendono positivo il trinomio $p(x)=2x^5-12x^3-14x$, vi sono solo due numeri interi negativi?

94 $x\in(-1;+\infty) \rightarrow p(x)=x^5-2x^2-x+2>0$ Vero o falso?

95 All'insieme dei valori reali che rendono negativo il polinomio $p(x)=(2x-1)^3-(3-6x)^2$ appartiene un valore razionale che lo annulla. Vero o falso?

Risolvi le seguenti disequazioni riconducibili a disequazioni di primo e secondo grado

96 $(1-x)(2-x)(3-x)>0$ R. $x<1 \vee 2<x<3$

97 $(2x-1)(3x-2)(4x-3)\le 0$ R: $\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{4} \vee x\le\frac{1}{2}$

98 $-2x(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee 0<x<1$

99 $(x^4-4x^2-45)\cdot(4x^2-4x+1)>0$

100 $3x(x-2)(x+3)(2x-1)\le 0$ R: $\frac{1}{2}\le x\le 2 \vee -3\le x\le 0$

101 $(x^2+1)(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee x>1$

102 $(1-9x^2)(9x^2-3x)2x>0$ R: x<-1/3

103 $(16x^2-1)(x^2-x-12)>0$ R: $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4} \vee x<-3 \vee x>4$

104 $-x(x^2-3x-10)(x^2-9x+18)\le 0$ R: $3\le x\le 5 \vee -2\le x\le 0 \vee x\ge 6$

105 $x^2(x-1)(2x^2-x)(x^2-3x+3)>0$ R: $0<x<\frac{1}{2} \vee x>1$

106 $(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3x)>0$ R: $x<-\sqrt{2} \vee 1<x<\sqrt{2} \vee -1<x<0 \vee x>3$

107 $x^3-x^2+x-1>0$ R: $x>1$

108 $x^3-5x^2+6<0$ R: $3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3} \vee x<-1$

109 $(5x^3-2x^2)(3x^2-5x)\ge 0$ R: $0\le x\le\frac{2}{5} \vee x\ge\frac{5}{3}$

110 $x^4-2x^3-x+2>0$ R: $x<1 \vee x>2$

111 $x^4+x^2-9x^2-9\le 0$ R: $-3\le x\le 3$

112 $25x^4-9>0$ R: $x<-\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x>\frac{\sqrt{15}}{5}$

113 $x^3-1\ge 2x(x-1)$ R: $x\ge 1$

114 $x^4-1>x^2+1$ R: $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$

115 $(x^2+x)^2+2(x+1)^2\ge 0$ R: $\mathbb{R}$

116 $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)<0$ R. $-1<x<\frac{1}{2} \vee x<-2$

117 $(x^2-4)(x-2)\ge 0$ R. $x\ge -2$

118 $(x-7)(x^2-7x+10)<0$ R. $5<x<7 \vee x<2$

119 $(x^2-4)(x^2-9)\ge 0$ R. $x\le -3 \vee -2\le x\le 2 \vee x\ge 3$

120 $(x^4+4x^3-12x^2)(x+3)\ge 0$ R. $x=0 \vee -6\le x\le -3 \vee x\ge 2$

121 $(x-4)^3-(x-4)^2-2x+10>2$ R. $3<x<4 \vee x>6$

122 $x^3-1\ge 0$ R. $x\ge 1$

123 $(x^2+6x-27)(2x^2+13x+6)<0$ R. $-9<x<-6 \vee -\frac{1}{2}<x<3$

124 $(x+3)(x+4)(x+5)(5-x)(4-x)(3-x)>0$ R. $-5<x<-4 \vee -3<x<3 \vee 4<x<5$

125 $(x^2-2x)(x^2+1)>0$ $I.S.=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

126 $(8-2x^2)(3x-x^2+4)<0$ $I.S:=(-2;-1)\cup(2;4)$

127 $(6x^2-6)(100x^2+100x)<0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\}$

128 $(1+x^2)(3x^2+x)<0$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{1}{3}<x<0\right\}$

129 $(x^2+3x+3)(4x^2+3)>0$ $I.S.=\mathbb{R}$

130 $(125+4x^2)(128+2x^2)<0$ $I.S.=\emptyset$

131 $(x^2+4x+4)(x^2-4x+3)>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-2 \vee -2<x<1 \vee x>3\}$

132 $(x^2-5x+8)(x^2-2x+1)>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1 \vee x>1\}$

133 $(-2x+1)(3x-x^2)>0$ $\quad I.S.=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty)$

134 $(4x^2-3x)(x^2-2x-8)<0$ $\quad I.S.=(-2;0)\cup\left(\frac{3}{4};4\right)$

135 $(4x-x^2+5)(x^2-9x+20)<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1 \vee 4<x<5 \vee x>5\}$

136 $(5+2x)(-2x^2+14x+16)<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{5}{2}<x<-1 \vee x>8\right\}$

137 $(5x-2x^2-10)(x^2+3x-28)>0$ $\quad I.S:=(-7;4)$

138 $(x^2-6x+9)(8x-7x^2)>0$ $\quad I.S:=\left(0;\frac{8}{7}\right)$

139 $(3x^2+2x-8)(6x^2+19x+15)<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-2<x<-\frac{5}{3} \vee -\frac{3}{2}<x<\frac{4}{3}\right\}$

140 $(3x^2-5x-2)(4x^2+8x-5)>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<-\frac{5}{2} \vee -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \vee x>2\right\}$

141 $(4x-4)(2x^2-3x+2)<0$ $\quad I.S.=(-\infty;1)$

142 $(2x-4)(2x^2-3x-14)>0$ $\quad I.S.=(-2;2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$

143 $(-7x+6)(x^2+10x+25)<0$ $\quad x>6/7$

144 $(-3+3x)(x^3-4x^2)>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0 \vee 0<x<1 \vee x>4\}$

145 $(x^2+1)(x^2-1)>0$ $\quad (1-x)(2-x)^2\leq 0$

146 $-x(x^2+1)(x+1)\geq 0$ $\quad (x+1)^2(x^2-1)<0$

147 $(x^2-4)(2x-50x^2)\geq 0$ $\quad (x-4)(2x^2+x-1)\geq 0$

148 $-3x^3+27>0$ $\quad 3x^3+27>0$

149 $x^3+3x^2+3x+1\leq 0$ $\quad x^3-6x+9<0$

150 $x^5+1>x(x^3+1)>0$ $\quad x^3-7x^2+4x+12\geq 0$

151 $x^3+5x^2-2x-24<0$ $\quad 6x^3+23x^2+11x-12\leq 0$

152 $4x^3+4x^2-4x-4\geq 0$ $\quad -6x^3-30x^2+192x-216<0$

153 $81x^4-1\leq 0$ $\quad 3x^5+96<0$

154 $x^4-13x^2+36<0$ $\quad 9x^4-37x^2+4\geq 0$

155 $-4x^4+65x^2-16<0$ $\quad x^6-4x^3+3\geq 0$

156 $x^8-x^4-2<0$ $\quad \frac{2}{3}x^3>\frac{9}{4}$

157 $(2x-1)^2\geq x^2(4x^2-4x+1)$

158 $(x+1)(x^2-1)>(x^2-x)(x-1)^2$

159 $-4x(x^2+7x+12)(x^2-25)(4-x)>0$

160 $(x-5x^2)(x^4-3x^3+5x^2)\geq 0$

161 $(4+7x^2)\left[x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}\right]<0$

162 $(x^3-9x)(x-x^2)(4x-4-x^2)>0$

163 $x|x+1|\cdot(x^2-2x+1)\geq 0$

►5. Disequazioni fratte

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. Una disequazione è **frazionaria** o **fratta** quando il suo denominatore contiene l'incognita.

Conosciamo la procedura per determinare IS di una disequazione fratta in quanto l'abbiamo applicata alle disequazioni fratte con termini di primo grado.

Procedura per determinare I.S. (Insieme **S**oluzione**) di una disequazione frazionaria (fratta)**

- 1° passo: applicando il primo principio si trasportano tutti i termini al primo membro;
- 2° passo: si calcola l'espressione al primo membro conducendo la disequazione alla forma $\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}\leq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}<0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}>0$;
- 3° passo: si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 oppure N(x)≥ 0 (a secondo della richiesta) con D(x)>0;
- 4° passo: si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri della frazione, se richiesti;
- 5° passo: si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere con le conoscenze raggiunte nello studio delle disequazioni di secondo grado.

Problema

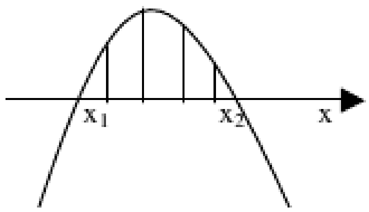
Determinare, al variare di x in R, il segno dell'espressione $E=\frac{4}{4x^2-1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{x}{1-2x}$

Osservazioni preliminari:

- l'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di x del Dominio dell'espressione stessa.
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla.
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

Strategia risolutiva:

- 1° passo: determiniamo il risultato dell'operazione assegnata: $E=\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$
- 2° passo: determiniamo il **D**ominio di **E**: C.E. $2x+1\neq 0 \wedge 2x-1\neq 0 \rightarrow D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$
- 3°passo: per studiare il segno impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}\geq 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema
- 4° passo: studiamo il segno del numeratore e del denominatore:
  segno N: $-2x^2+x+3\geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta=1+24=25$, positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola rappresentativa $y=-2x^2+x+3$ è del tipo in figura per cui essendo $x_1=-1$ e $x_2=\frac{3}{2}$ si ha $N\geq 0$ per $-1\leq x\leq\frac{3}{2}$



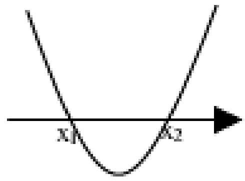
  segno D: il denominatore è composto da due fattori di primo grado, quindi $d_1>0$ per $x>-\frac{1}{2}$; $d_2>0$ per $x>\frac{1}{2}$
- 5° passo: Costruiamo la tabella dei segni:

	$x<-1$	$-1<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
segno N	−	+	+	+	−
segno d_1	−	−	+	+	+
segno d_2	−	−	−	+	+
segno E	−	+	−	+	−

Dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l'espressione E si annulla per $x=-1 \vee x=\frac{3}{2}$
- l'espressione E è positiva per $x\in I=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-1<x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$
- l'espressione E è negativa per $x\in I=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x<-1 \vee -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \vee x>\frac{3}{2}\right.\right\}$

Osserviamo che **il segno del denominatore** si può determinare riconoscendolo come polinomio di secondo grado con due zeri reali e dunque rappresentabile con una parabola del tipo in figura per cui possiamo affermare $D>0$ per $x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{2}$ in cui sono rispettate le C.E.



Con questo procedimento la tabella dei segni sarebbe modificata nel modo seguente lasciando inalterato il risultato.

	$x<-1$	$-1<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
segno N	−	+	+	+	−
segno D	+	+	−	+	+
segno E	−	+	−	+	−

-

■ $3-\frac{1}{2x+1}\geq\frac{1}{1-x}$.

1° passo: trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro $3-\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{1-x}\geq 0$

2° passo: eseguite i calcoli, verificate che si ottiene: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)}\geq 0$

3° passo: studiate il segno del numeratore e del denominatore:

- segno N: $-6x^2+2x+1\geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-6x^2+2x+1=0$, calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=7$, positivo per cui si hanno due soluzioni ………………… ; la parabola rappresentativa $y=-6x^2+2x+1$ è del tipo …………………… per cui essendo $x_1=$……… e $x_2=$……… si ha $N\geq 0$ per ………$\leq x\leq$………
- segno D: $(2x+1)\cdot(1-x)>0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x=-\frac{1}{2}$ e $x_2=1$ e la parabola rappresentativa volge la concavità verso il basso; pertanto si ha $D>0$ per ……………… che rispetta le C.E.: $x_1\neq-\frac{1}{2} \wedge x_2\neq 1$

4° passo: completate la tabella dei segni:

		$-\frac{1}{2}$				
segno N						
segno D						
segno frazione						

- 5° passo: verifica che $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1-\sqrt{7}}{6}\leq x\leq\frac{1+\sqrt{7}}{6} \vee x>1\right.\right\}$

Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte

164	$\frac{x+2}{x-1}>0$	$I.S.=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$	$\frac{x+3}{4-x}>0$	$\frac{1}{x^3}>8$
165	$\frac{x+5}{x-7}>0$	$I.S.=(-\infty;-5)\cup(7;+\infty)$	$\frac{2-4x}{3x+1}\geq 0$	$I.S.=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$
166	$\frac{x^2-4x+3}{4-7x}\geq 0$	$x<\frac{4}{7}\vee 1\leq x\leq 3$	$\frac{x+5}{x^2-25}>0$	$I.S.=(5;+\infty)$
167	$\frac{x^2-1}{x-2}>0$	$-1<x<1\vee x>2$	$\frac{x^2-4x+3}{x+5}<0$	$x<-5\vee 1<x<3$
168	$\frac{-x^2+4x-3}{x+5}>0$	$(-\infty;-5)\cup(1;3)$	$\frac{x^2+1}{x^2-2x}>0$	$x<0\vee x>2$
169	$\frac{9-x^2}{2x^2-x-15}>0$	$I.S.=\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$	$\frac{x^2-7x}{-x^2-8}>0$	$I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<7\}$
170	$\frac{1}{x^2+2x+1}>0$	$I.S.=\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}\}$	$\frac{-3}{-x^2-4x-8}>0$	$I.S.=\{x\in\mathbb{R}\}$
171	$\frac{x^2+2x+3}{-x^2-4}>0$	$I.S.=\emptyset$	$\frac{3x-12}{x^2-9}>0$	$I.S.=(-3;3)\cup(4;+\infty)$
172	$\frac{5-x}{x^2-4}>0$	$I.S.=(-\infty;-2)\cup(2;5)$	$\frac{3x-x^2-2}{2x^2+5x+3}>0$	$I.S.=\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(1;2)$
173	$\frac{4-2x}{x^2-2x-8}>0$	$x<-2\vee 2<x<4$	$\frac{x^2-4x+3}{5-10x}>0$	$x<\frac{1}{2}\vee 1<x<3$
174	$\frac{x^2+3x+10}{4-x^2}>0$	$I.S.=(-2;2)$	$\frac{x^2-3x+2}{4x-x^2-5}>0$	$I.S.=(1;2)$
175	$\frac{x^2+2}{25-x^2}>0$	$I.S.=(-5;5)$	$\frac{3x^2-2x-1}{4-2x}>0$	$I.S.=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;2)$
176	$\frac{x+2}{x^2+4x+4}>0$	$I.S.=(2:+\infty)$	$\frac{5-x}{x^2-4x+3}>0$	$I.S.=(-\infty;1)\cup(3;5)$
177	$\frac{-x^2+2x+8}{-x-1}<0$	$I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;4)$	$\frac{x^2+3x+2}{25-x^2}>0$	$I.S.=(-5;-2)\cup(-1;5)$
178	$\frac{x^2+4x+3}{3x-6}>0$	$-3<x<-1\vee x>2$	$\frac{3+4x}{-x^2+5x-4}>0$	$x<-\frac{3}{4}\vee 1<x<4$
179	$\frac{1-x^2}{x^2+2x+3}<0$	$x<-1\vee x>1$	$\frac{x^2-9}{x^2-5x}>0$	$x<-3\vee 0<x<3\vee x>5$
180	$\frac{x^2-x-2}{x-x^2+6}>0$	$-2<x<-1\vee 2<x<3$	$\frac{x^2-5x+6}{-3x+7}<0$	$2<x<\frac{7}{3}\vee x>3$
181	$\frac{2x+8}{x^2+4x-12}>0$	$-6<x<-4\vee x>2$	$\frac{x^2-2x-63}{4x+5-x^2}>0$	$-7<x<-1\vee 5<x<9$
182	$\frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0$	$-1<x<0\vee 1<x<4$	$\frac{x^2-2x}{5-x^2}>0$	$-\sqrt{5}<x<0\vee 2<x<\sqrt{5}$
183	$\frac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18}\leq 0$			$x<-2\vee -1\leq x\leq 2\vee x>3$
184	$\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}>0$			$I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;3)\cup(5;+\infty)$
185	$\frac{4x+7}{3x^2-x-2}>0$			$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\vert\, -\frac{7}{4}<x<-\frac{2}{3}\vee x>1\right\}$
186	$\frac{-x^2-4x-3}{6x-x^2}>0$			$I.S.=(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(6;+\infty)$
187	$\frac{5x+x^2+4}{6x^2-6x}>0$			$I.S.=(-\infty;-4)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$

188 $\frac{9-x^2}{x^2+5x+6}\cdot\frac{6x-2x^2}{4-x^2}>0$ — $0<x<2$

189 $\frac{2x-4x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{16-x^2}{5x-x^2}\leq 0$ — $x\leq 1/2 \vee 3<x\leq 4 \vee x>5$

190 $\frac{1-x^2}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{2}$ — $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

191 $\frac{x+2}{x-1}\geq\frac{24}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}$ — $x<-1 \vee 1<x\leq 10-\sqrt{74} \vee x\geq 10+\sqrt{74}$

192 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}<\frac{2x+1}{x^2-1}$ — $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\wedge x\neq 0$

193 $\frac{x}{x+2}\geq\frac{x-4}{x^2-4}$ — $x<-2 \vee x>2$

194 $\frac{4x+1}{x^2-9}+\frac{1-x}{x+3}<6-\frac{x}{x-3}$ — $x<-3 \vee -\frac{13}{6}<x<3 \vee x>4$

195 $\frac{x+1}{2x-1}+\frac{3}{4x+10}\geq 1-\frac{2x+2}{4x^2+8x-5}$ — $-\frac{5}{2}<x\leq-\frac{3}{2} \vee \frac{1}{2}<x\leq\frac{7}{2}$

196 $\frac{2x+5}{(2x+4)^2}\geq\frac{2}{2x+4}$ — $x\leq-\frac{3}{2}$

197 $\frac{10x^2}{x^2+x-6}+\frac{x}{2-x}-1\leq\frac{5}{x+3}$ — $-3<x<2$

198 $\frac{5x+20}{5x+5}+\frac{2x-8}{2x-2}\geq 2$ — $-1<x<1$

199 $\frac{8}{8x^2-8x-70}-\frac{4}{4x^2-4x-35}>\frac{8x+8}{4x^2-20x+21}$ — $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2} \vee x<-1$

200 $\frac{4x^2-8x+19}{8x^2-36x+28}-\frac{2x-5}{4x-4}\geq\frac{8x+12}{8x-28}$ — $\frac{1}{2}\leq x<\frac{7}{2}$

201 Assegnate le due funzioni $f_1=\frac{x^2+1}{2x-x^2}$ e $f_2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}$ stabilite per quali valori della variabile indipendente si ha $f_1\geq f_2$. R. $-1-\sqrt{2}\leq x<0 \vee -1+\sqrt{2}\leq x<2$

202 Spiegate perché l'espressione letterale $E=\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}$ nel suo Dominio è sempre positiva.

203 Per quali valori di x la funzione $y=\frac{(x-1)\cdot x-2}{5x^2-x-4}$ è maggiore o uguale a 1. R. $-\frac{3}{2}\leq x<-\frac{4}{5}$

204 x, x+2, x+4 sono tre numeri naturali. Determinate **in N** il più piccolo numero che rende vera la proposizione: "il doppio del primo aumentato del prodotto degli altri due è maggiore della differenza tra il doppio del terzo e il quadrato del secondo" R. 5

205 Date chiare e sintetiche motivazioni alla verità della seguente proposizione: "il segno della frazione $f=\frac{9-x^2+3x}{2+x^2}$ non è mai positivo e la frazione non ha zeri reali".

206 Stabilite se basta la condizione $x\neq 1 \wedge x\neq -1$ per rendere positiva la frazione $f=\frac{x^3-1}{x^4-2x^2+1}$

207 Determina per quali valori reali la frazione $f=\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}$ risulta non superiore a 1.

►6. Sistemi di disequazioni

Problema

Nell'equazione $x^2-(k-3)x+k^2-3k+1=0$ *, determinare per quali valori del parametro k si ottengono soluzioni reali e concordi.*

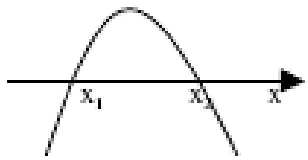
Abbiamo già affrontato un problema di questo tipo discutendo le equazioni parametriche di secondo grado e dunque sappiamo che la richiesta del problema esige che il discriminante (Δ) sia non negativo affinché le soluzioni siano reali e che il prodotto delle stesse sia positivo. Pertanto il problema è formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}k^2-6k+9-4k^2+12k-4\geq 0\\ k^2-3k+1>0\end{cases}$

> **Risolvere il sistema** significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono le soluzioni comuni alle disequazioni che lo compongono.

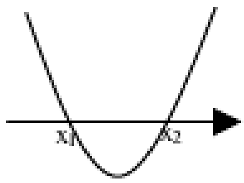
Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema; indicati con I.S.₁ e I.S.₂ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato da

I.S.* = *I.S.$_1 \cap$ ***I.S.***$_2$ (insieme intersezione degli insiemi soluzione delle due disequazioni).

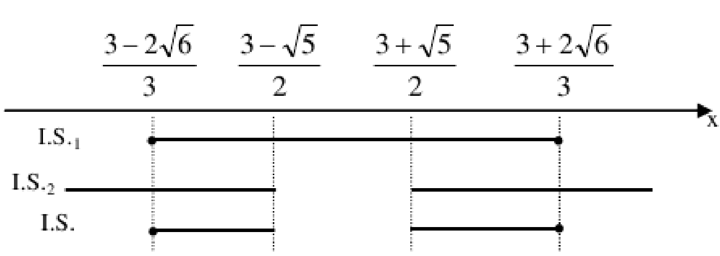
- $d_1: -3k^2+6k+5\geq 0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente negativo e $\dfrac{\Delta}{4}=24$ positivo; la parabola rappresentativa è del tipo rappresentata in figura con $x_1=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3} \vee x_2=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$ quindi $I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}\leq x\leq\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$



- $d_2: k^2-3k+1>0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente positivo e $\Delta=5$ positivo; la parabola rappresentativa è è del tipo rappresentata in figura con $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ quindi $I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$



Per determinare l'**I**nsieme **S**oluzione del sistema rappresentiamo in un grafico gli insiemi soluzioni delle disequazioni risolte e visualizziamo l'insieme formato dai valori che soddisfano contemporaneamente sia l'una che l'altra: sull'asse reale depositiamo i valori numerici trovati e rappresentiamo su righe distinte i due insiemi soluzione: gli intervalli in cui cadono soluzioni della prima e della seconda disequazione rappresentano l'Insieme Soluzione del sistema.



$$I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3-2\sqrt{6}}{3}\leq x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\leq\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}=\left[\frac{3-2\sqrt{6}}{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right]$$

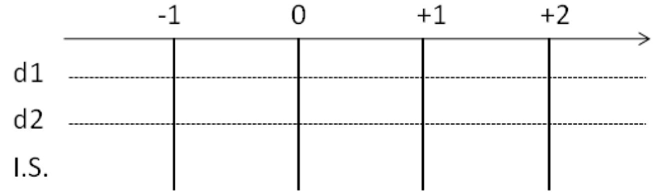
- *Per quali valori di x le due funzioni* $f_1 = x^4 - x^3 + x - 1\ ;\ f_2 = x^4 - 8x$ *assumono contemporaneamente valore positivo?*

Il problema si può formalizzare nel sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^4 - x^3 + x - 1 > 0 \\ x^4 - 8x > 0 \end{cases}$

Scomponiamo in fattori per determinarne la soluzione

- $d_1:\ x^4 - x^3 + x - 1 = x^3(x-1) + (x-1) = (x-1)\cdot(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x^2-x+1) > 0$ verifica che $I.S._1 = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- $d_2:\ x^4 - 8x = x\cdot(x^3-8) = x\cdot(x-2)(x^2+2x+4) > 0$ verifica che $I.S._1 = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

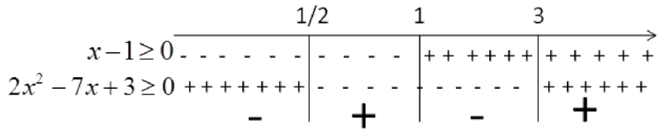
Completa lo schema e determina l'insieme soluzione, verifica che x<-1 o x>2:



- $\begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \le 0 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x} \ge 0 \\ 3 - 4x < 0 \end{cases}$

Il sistema è formato da tre disequazioni; risolviamo separatamente ciascuna disequazione:

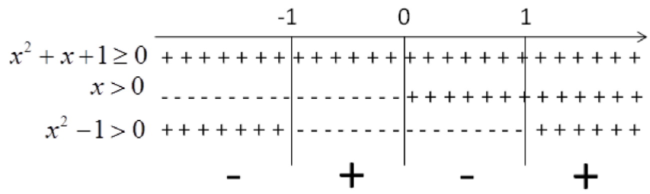
- $d_1:\ 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \le 0$ di terzo grado, scomponiamo in fattori. Si ha che $x = 1$ è uno zero del polinomio; con la regola di Ruffini $d_1:\ (x-1)\cdot(2x^2 - 7x + 3) \le 0$. Studio del segno:



L'insieme soluzione, tenendo conto che cerchiamo i valori per i quali $d_1 \le 0$ è $x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < 3$

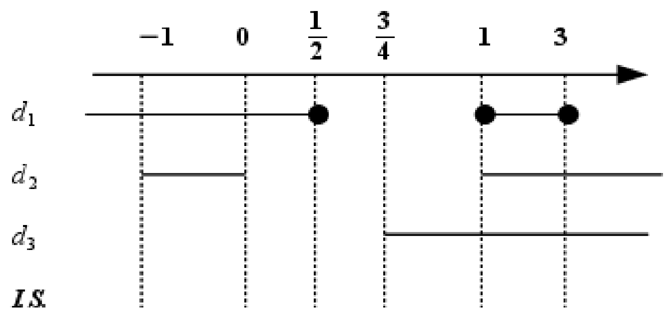
- $d_2:\ \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x} \ge 0$ disequazione fratta, scomponiamo in fattori il denominatore: $\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2-1)} \ge 0$

Studiamo il segno dei singoli fattori o divisori



- $d_3:\ 3 - 4x < 0$ è di primo grado per cui $x > \dfrac{3}{4}$

Ricordiamo che la ricerca dell'Insieme Soluzione del sistema si effettua determinando l'insieme $I.S._1 \cap I.S._2 \cap I.S._3$ individuabile attraverso il grafico:



Scegli la risposta corretta: [A] $1 \le x < 3$ [B] $1 < x < 3$ [C] $1 < x < 3$ [D] $1 \le x \le 3$

208 $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-5\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee 2<x\leqslant 5\}$

209 $\begin{cases} x^2-4x+3\leqslant 0 \\ x-2x^2<-10 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{5}{2}<x\leqslant 3\right\}$

210 $\begin{cases} 4x-x^2>0 \\ 3x^2(x-3)>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x<4\}$

211 $\begin{cases} x^2+5x+6\leqslant 0 \\ 2x+5\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -3\leq x\leq -\frac{5}{2}\right\}$

212 $\begin{cases} 3x-x^2-2\leqslant 0 \\ x^2>49 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-7 \vee x>7\}$

213 $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x^2-1>0 \\ 2x-x^2<0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$

214 $\begin{cases} x^2-4x+4\geqslant 0 \\ x<6 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<6\}$

215 $\begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x\leqslant 6 \\ 1-x^2\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1 \vee 1\leq x<2 \vee 2<x\leq 6\}$

216 $\begin{cases} x^2+6x+9<0 \\ x<2 \\ x^2+1>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

217 $\begin{cases} x^2+6x+9\leqslant 0 \\ x<2 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-3\}$

218 $\begin{cases} 4x-x^2-3<0 \\ 3x\geqslant 2 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2}{3}\leq x<1 \vee x>3\right\}$

219 $\begin{cases} 2x^2<8 \\ -x^2+5x>-6 \\ x^2(9-x^2)\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=0\}$

220 $\begin{cases} (x^2-4x+3)(2x-4)>0 \\ 2x-x^2\leqslant 1 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<2 \vee x>3\}$

221 $\begin{cases} (3-x)(x^2-4)(x^2-2x-8)<0 \\ x^2-64\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<3 \vee 4<x\leq 8\}$

222 $\begin{cases} 2x^2-x-1\leqslant 0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=1\}$

223 $\begin{cases} 2x^2-x-1<0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

224 $\begin{cases} x^2-10x+25>0 \\ x<7 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<5 \vee 5<x<7\}$

225 $\begin{cases} x^2-10x+25\geqslant 0 \\ x<7 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<7\}$

226 $\begin{cases} \frac{1}{x}>\frac{1}{x-3} \\ 3x-1-2x^2<0 \\ \frac{x^2-6x+5}{2-x}>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,3)$

227 $\begin{cases} x^4-8\geq 1 \\ \dfrac{5-x}{x}<\dfrac{1}{2} \\ x^3-1<0 \end{cases}$ $I.S.=(-\infty;-\sqrt{3}]$

228 $\begin{cases} x^2-4x+3\leq 0 \\ x^2-4>0 \\ x^2+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x\leq 3\}$

229 $\begin{cases} x^2-5x+6\leq 0 \\ x^2-1>0 \\ x^2+1<0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

230 $\begin{cases} x^2-2x+1\geq 0 \\ x^2+5x\geq 0 \\ x^2+1>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee x\geq 0\}$

231 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ x^2+5x\geq 0 \\ x^2+x+23>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee 0\leq x<1 \vee x>1\}$

232 $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2<0 \\ 2x^2-x-1>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

233 $\begin{cases} x^2-3x+2\leq 0 \\ x^2-4x+4\leq 0 \\ x^2-x+10>0 \\ x^2-2x\leq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

234 $\begin{cases} x^2-3x+2\leq 0 \\ x^2-4x+4\leq 0 \\ x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-4x+4\geq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

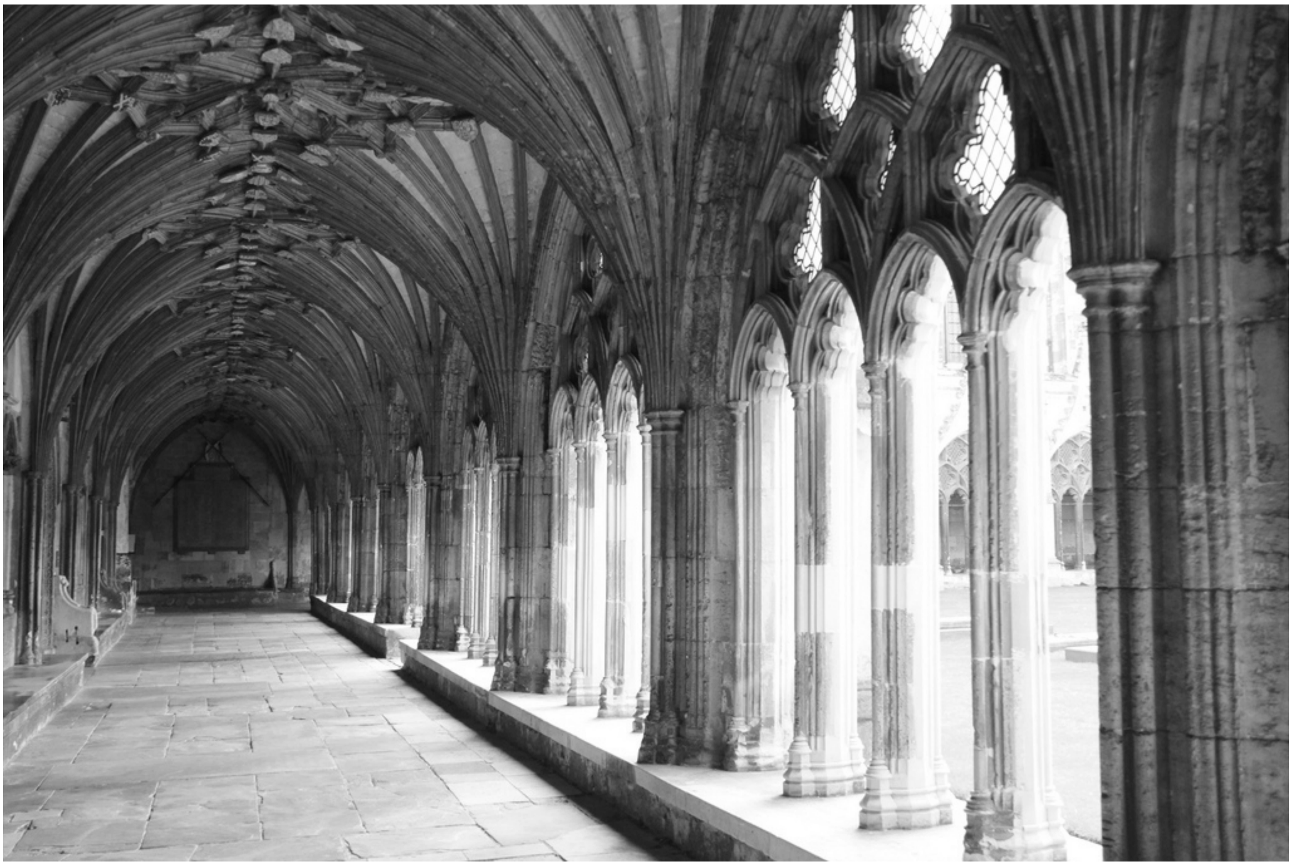
235 $\begin{cases} \dfrac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0 \\ \dfrac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18}\leq 0 \end{cases}$ $3<x<4 \vee -1<x<0 \vee 1<x\leq 2$

236 $x^3-5x^2-14x\geq 0 \wedge \dfrac{2x+1}{2x}>\dfrac{3}{x+1}$ $I.S.=[-2;-1)\cup[7;+\infty)$

237 $\begin{cases} x(x-3)>3\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right) \\ 2+x\cdot\dfrac{3x-7}{3}\geq 5-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ determina i numeri naturali che risolvono il sistema $I.S.=\{3,4,5\}$

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

5. SISTEMI NON LINEARI



Canterbury Cathedral by Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705

Indice

►1. Sistemi di secondo grado

Un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

DEFINIZIONE. Il **grado di un sistema di equazioni**, se le equazioni che formano il sistema sono costituite da polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Esempio

Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

A) $\begin{cases}-2x+3y=4\\3x+5y-2=0\end{cases}$

La prima equazione e la seconda equazione sono di primo grado.
Il sistema è di primo grado

B) $\begin{cases}2x-y=0\\x^2+6y^2-9=0\end{cases}$

La prima equazione è di primo grado, la seconda equazione di secondo grado.
Il sistema è di secondo grado.

C) $\begin{cases}x^2+y^2=0\\y=3x^2-2x+6=0\end{cases}$

La prima equazione è di secondo grado, come la seconda.
Il sistema è di quarto grado.

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da un'equazione di secondo grado e una di primo grado.

Sistemi di secondo grado numerici

Esempio

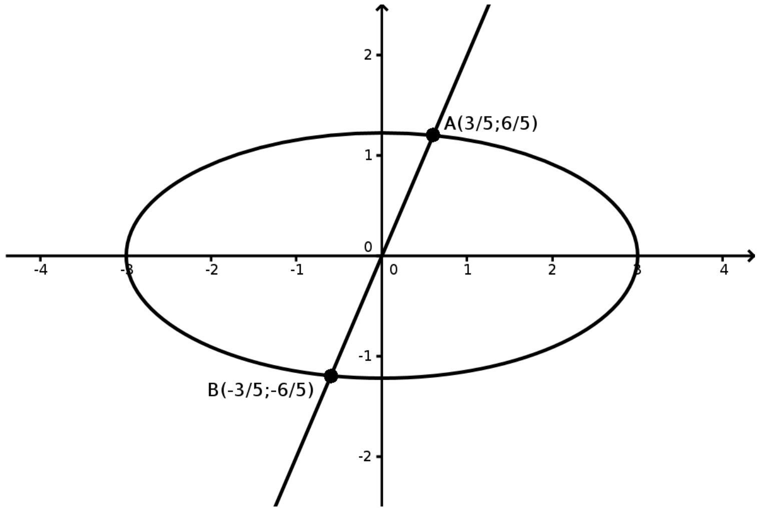
■ $\begin{cases}2x-y=0\\x^2+6y^2-9=0\end{cases}$

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases}y=2x\\x^2+6\cdot(2x)^2-9=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=2x\\x^2+24x^2-9=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=2x\\25x^2-9=0\end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $25x^2-9=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y. Le coppie $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ se ci sono, si dicono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases}y=2x\\25x^2-9=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}\\y_1=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5}\end{cases}\\\begin{cases}x_2=+\frac{3}{5}\\y_2=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=+\frac{6}{5}\end{cases}\end{cases} \rightarrow \left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Nel corso degli studi vedremo come le soluzioni del sistema $\begin{cases}2x-y=0\\x^2+6y^2-9=0\end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=2x$ e l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2+6y^2=9$. Con il software Geogebra inseriamo le due equazioni e otteniamo la seguente figura.



I punti A e B, intersezione tra la retta e l'ellisse corrispondono alle soluzioni del sistema.

Esempio

- $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$

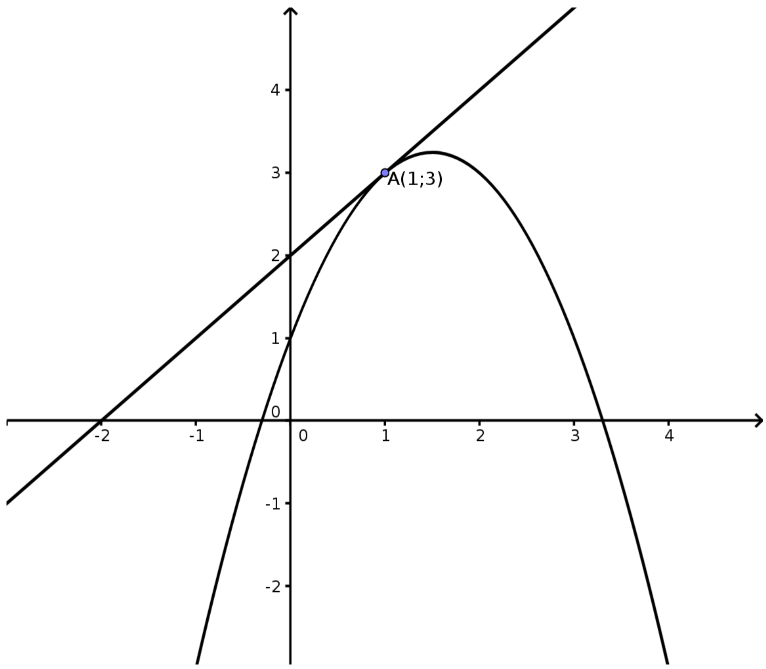
Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+(x+2)-3x-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$

Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. L' **equazione risolvente del sistema**. $x^2-2x+1=0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1=x_2=1$.

Il sistema ha due soluzioni reali coincidenti, $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+2=3 \end{cases} \rightarrow (1;3)$

La soluzione del sistema $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=x+2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y=-x^2+3x+1$. La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola.

Ecco come appare la rappresentazione grafica ottenuta con Geogebra.



Esempio

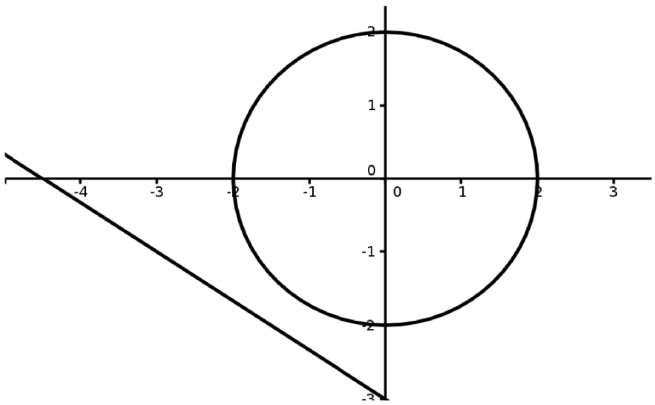
- $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\left(-\frac{2}{3}x-3\right)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\frac{4}{9}x^2+4x+9-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ \frac{13}{9}x^2+4x+5=0 \end{cases}$$

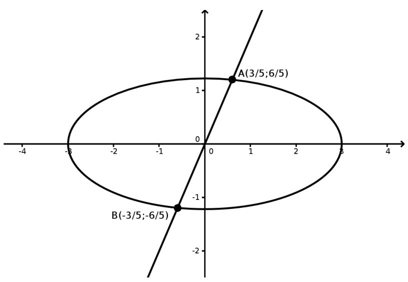
Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $\frac{13}{9}x^2+4x+5=0$. Il discriminante dell'equazione è negativo: $\Delta=16-\frac{260}{9}<0$, quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $I:S=\emptyset$.
Il sistema non ha soluzioni reali e il sistema si dice **impossibile**.

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{2}{3}x-3$ e la circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$. La seguente figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in Geogebra. Notiamo che le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro.

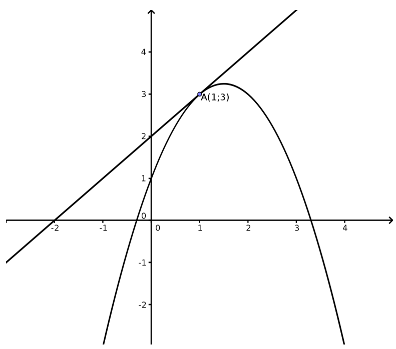


Osservazione: Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza , parabola, ellisse o iperbole).
Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva.
In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

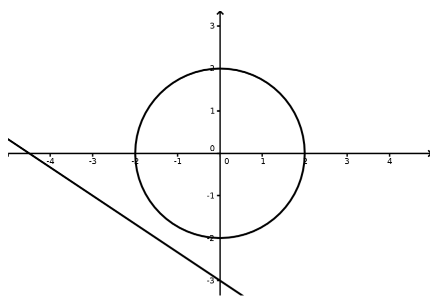
- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti.
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.



$\Delta>0$



$\Delta=0$



$\Delta<0$

Conclusione

- Se l'equazione risolvente è di **secondo grado,** in base al discriminante abbiamo:
  - $\Delta < 0$: l'equazione risolvente è impossibile: in questo caso anche il sistema risulta essere impossibile.
  - $\Delta = 0$: l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti: in questo caso il sistema si completa sostituendo il valore trovato nell'equazione di primo grado. Il sistema ha due soluzioni coincidenti. La soluzione è una coppia ordinata di numeri reali.
  - $\Delta > 0$: l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte: si sostituisce allora ciascuno dei due valori trovati nell'equazione di primo grado. Le due coppie ordinate di numeri reali trovate sono entrambe soluzioni del sistema.
- Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di **primo grado** o una **uguaglianza** vera o falsa:
  - se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;
  - se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
  - se l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso di $\Delta = 0$).

Esempi

■ $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+5y^2=6 \end{cases}$.

Ricava y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:.

$$\begin{cases} y=1-2x \\ x^2+5y^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x^2+5(1-2x)^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 21x^2\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \end{cases}$$

Risolvi l'equazione risolvente di secondo grado, verifica che le soluzioni sono $x_1=1 \vee x_2=-\frac{1}{21}$

Sostituisci i valori trovati per la x nell'equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti di y:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1-2(-1)=\ldots\ldots \end{cases} ; \begin{cases} x_2=-\frac{1}{21} \\ y_2=\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow (1;\ldots) \vee \left(-\frac{1}{21};\ldots\ldots\right)$$

■ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ x^2-3y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ \left(\frac{1+3y}{2}\right)^2-3y^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ -\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{2}y-\frac{3}{4}=0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente ha il discriminante uguale a 0, quindi ha due soluzioni reali coincidenti: $y_1=y_2=1$

Sostituiamo i valori trovati per la y nell'equazione di primo grado per trovare il valore corrispondente di x.

$$\begin{cases} x_1=x_2=2 \\ y_1=y_2=1 \end{cases} \rightarrow (2;1)$$

■ $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

Ricaviamo y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y=\frac{5x-3}{2} \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{5x-3}{2} \\ x^2-\left(\frac{5x-3}{2}\right)^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{5x-3}{2} \\ -\frac{21}{4}x^2+\frac{15}{2}x-\frac{13}{4}=0 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione associata. In questo caso il discriminante dell'equazione è negativo. L'equazione risolvente non ha soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

- $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$$\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=0 \end{cases}$$

L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è una **identità** (uguaglianza vera) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y=-x$) sono soluzioni del sistema: $\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow I.S.=(k\,;-k)$.
Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice **indeterminato**.

- $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x+y=0 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$$\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=9 \end{cases}$$

L' equazione risolvente del sistema in questo caso è una **contraddizione** (uguaglianza falsa).
Il sistema è **impossibile**.

- $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2+2x-1-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases}$$

L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è l'equazione di primo grado $2x+5=0$, la cui soluzione è $x=\frac{5}{2}$.
Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica: $\begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado

1 $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(-1;-1) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$

2 $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$ R. $(1;1) \vee (-1;-1)$ $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$ R. $\left(0;-\frac{2}{5}\right) \vee \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$

3 $\begin{cases} y^2-3y=2xy \\ y=x-3 \end{cases}$ R. $(3;0) \vee (-6;-9)$ $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$

4 $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+5y^2=23 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{29}{5},\frac{12}{5}\right) \vee (3,-2)$ $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{46}{27},-\frac{20}{27}\right) \vee (2{,}0)$

5 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $(3;1) \vee (5;3)$

6 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1)$

7 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-3x+2y=3 \end{cases}$ R. $(0;1) \vee \left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$ $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

8 $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

9 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y+7=0 \end{cases}$ R. $(-4;-3) \vee \left(\frac{44}{25};\frac{117}{25}\right)$

10 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-4xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{10}{7};\frac{11}{14}\right)$

11 $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $\left(2;-\frac{3}{2}\right) \vee \left(\frac{22}{25};-\frac{89}{50}\right)$

12 $\begin{cases} 2x^2+xy-7x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $y=-2x+3 \to \forall (x,y) \in \mathbb{R}$

13 $\begin{cases} x-2y-7=0 \\ x^2-xy=4 \end{cases}$ R. $(1;-3) \vee \left(-8;-\frac{15}{2}\right)$

14 $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$ R. $(-2;2) \vee \left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

15 $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-x+2y-4=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ R. $(4;4) \vee (-5;-2)$

16 $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ R. $(4;2) \vee \left(\frac{4}{15};-\frac{2}{15}\right)$

17 $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$ R. $\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \vee \left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

18 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-2xy-2y-2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)$

19 $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2-2x+6y=8 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{-9+\sqrt{241}}{8};\frac{-25+\sqrt{241}}{16}\right) \vee \left(\frac{9+\sqrt{241}}{8};\frac{25+\sqrt{241}}{16}\right)$

20 $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};\frac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right) \vee \left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};\frac{2+3\sqrt{2}}{4}\right)$

21 $\begin{cases} \frac{1}{2}(2y-x)(y+x)-(x+y)^2+\frac{3}{2}x(x+y+1)+2(y-1)=0 \\ \frac{2}{3}(x-3)^2+4\left(x-\frac{3}{2}\right)=2(xy+1) \end{cases}$ R. $\left(\frac{6\pm 8\sqrt{3}}{13};\frac{17\mp 12\sqrt{3}}{13}\right)$

Sistemi di secondo grado letterali

Esempio

■ $\begin{cases} y-kx=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases}$

Si risolve come nel caso degli analoghi sistemi numerici. Bisognerà, nell'equazione risolvente, discutere per quali valore del parametro si otterranno soluzioni reali. Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda equazione: $\begin{cases} y=kx-2 \\ kx-2-x^2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=kx-2 \\ -x^2+kx-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=kx-2 \\ x^2-kx+4=0 \end{cases}$

Risolviamo e discutiamo l'equazione di secondo grado

$$\Delta=k^2-16 \rightarrow \begin{array}{l} \Delta>0 \rightarrow k<-4 \lor k>4 \rightarrow x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \lor x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta=0 \rightarrow k=-4 \lor k=4 \rightarrow x_1=x_2=\frac{k}{2} \\ \Delta<0 \rightarrow -4<k<4 \end{array}$$

Ricaviamo i valori della x e li sostituiamo nella prima equazione:

$$\begin{cases} y-kx=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases} \text{ se } k\le-4 \lor k\ge4 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1=\frac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2=\frac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}$$

Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro

22 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$ R. se $k\ge\frac{9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases}$

23 $\begin{cases} ky+2x=4 \\ xy=2 \end{cases}$ R. se $k\le1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1-\sqrt{1-k} \\ y_1=-\frac{2}{\sqrt{1-k}-1} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=1+\sqrt{1-k} \\ y_2=\frac{2}{\sqrt{1-k}+1} \end{cases}$

24 $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2-kx^2+1=0 \end{cases}$ R. se $0<k<1 \lor 1<k\le2 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_1=\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_2=\frac{1+\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases}$

25 $\begin{cases} y=kx-2k \\ x^2-2y-x=2 \end{cases}$ R. $\forall k\in\mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=2k-1 \\ y_2=2k^2-3k \end{cases}$

26 $\begin{cases} y=x+k \\ y=3x^2+2x \end{cases}$ R. se $k\ge-\frac{1}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1-\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1+\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases}$

27 $\begin{cases} y=-x+k \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2};\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2}\right);\left(\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2};\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2}\right)$

28 $\begin{cases} y+x-k=0 \\ xy+2kx-3ky-6k^2=0 \end{cases}$ R. $\forall k\in\mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=3k \\ y_1=y_2=-2k \end{cases}$

29 $\begin{cases} y-x+k=0 \\ y-x^2+4x-3=0 \end{cases}$ R. se $k\le\frac{13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k-\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k+\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases}$

Sistemi di secondo grado frazionari

Esempio

■ $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \end{cases}$.

Il sistema dà origine a un'equazione di secondo grado. Nel caso dei sistemi frazionari occorre procedere alla definizione del campo di esistenza dell'equazione frazionaria, discutendo i denominatori della equazione.

Determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione frazionaria: $C.E.\ y\neq -2 \wedge y\neq -\frac{5}{2}$

Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera

$\frac{x}{y+2}=\frac{x}{2y+5} \rightarrow x\cdot(2y+5)-x\cdot(y+2)=0 \rightarrow 2xy+5x-xy-2x=0 \rightarrow xy+3x=0$

Sostituiamo l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni: $\begin{cases} y=2x-2 \\ xy+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x(2x-2)+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}$

$2x^2+x=0$ è l'equazione risolvente del sistema con soluzioni $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$

sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado ottenendo le soluzioni del sistema

$\begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{2} ¿ \\ y_2=-1 \end{cases} \rightarrow (0;-2) \vee \left(\frac{1}{2};-1\right)$

La soluzione $(0;-2)$ non soddisfa le C.E. . Il sistema ha soluzione $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Trova le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari

30 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x+2y}{x-1}=2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 1 \rightarrow (2;0)\vee\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)\right]$

31 $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}=4 \\ x^2+y^2+3x-2y=1 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq y \rightarrow \left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)\vee(-2;-1)\right]$

32 $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+2y}=3 \\ xy+3y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -2y \rightarrow \emptyset]$

33 $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{x}=\dfrac{1-x}{y-1} \\ 2x-y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq 0 \wedge y\neq 1 \rightarrow (4;7)]$

34 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-2}=y+\dfrac{1}{3} \\ y=2x+2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 2 \rightarrow (-1;0)\vee\left(\frac{10}{3};\frac{26}{3}\right)\right]$

35 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y-2}=\dfrac{y-1}{x+1} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq -1 \wedge y\neq 2 \rightarrow \left(-\frac{5}{2};4\right)\right]$

36 $\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+y}=x \\ x-y=0 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -y \rightarrow \emptyset]$

37 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2y-1}=y \\ 2y-x=-4 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ y\neq \frac{1}{2} \rightarrow (2;-1)\vee\left(9;\frac{5}{2}\right)\right]$

Sistemi di secondo grado in tre incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni a partire dalle equazioni di primo grado, per ottenere un'equazione di secondo grado in una sola incognita (equazione risolvente del sistema). A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema.

Esempio

■ $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$

Isoliamo z dalla prima equazione, che è di primo grado, e sostituiamo nelle altre equazioni.

$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre equazioni

$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$

L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema, le sue soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$

Sostituiamo i valori trovati per la y nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della x e della z.

$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} z=5(2)-2=8 \\ x=2(2)-1=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} z=5(-1)-2=-7 \\ x=2(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{matrix} \rightarrow (x_1;y_1;z_1)\vee(x_2;y_2;z_2) \rightarrow (3;2;8)\vee(-3;-1;-7)$

Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite

38 $\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x^2+2xz+y^2=6 \end{cases}$ R. $(1;2;-1)$ $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ x^2-y+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

39 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x^2-y+z=3 \end{cases}$ infinite soluzioni $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ x^2-y^2+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{47}{3};-\frac{46}{3};\frac{5}{3}\right)$

40 $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 5y+2z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=29 \end{cases}$ R. $(5;0;-2)\vee(-2;0;5)$

41 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=9 \\ x^2-y+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-4;\frac{25}{2};\frac{17}{2}\right)\vee\left(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

42 $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$ R. $(-1;-2;3)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$

43 $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+y^2+z^2=32 \end{cases}$ R. $\left(0;\frac{3\sqrt{7}+1}{2};-\frac{3\sqrt{7}-1}{2}\right)\vee\left(0;-\frac{3\sqrt{7}-1}{2};\frac{3\sqrt{7}+1}{2}\right)$

►2. Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice **simmetrico** se non cambia scambiando le incognite.

Per esempio, nel sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3\,xy+5=0 \end{cases}$ se scambiamo la x con la y otteniamo $\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3yx+5=0 \end{cases}$ che è identico al precedente. Le soluzioni sono $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}$ e come si può notare x e y vengono scambiate nella soluzione.

In generale, se il sistema è simmetrico trovata una soluzione otteniamo la soluzione simmetrica scambiando la x con la y e la y con la x.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Per risolvere un sistema del tipo $\begin{cases} x+y=s \\ x\,y=p \end{cases}$ è sufficiente ricordare che nell'equazione del tipo $x^2+b\,x+c=0$, la somma delle radici è -b, mentre il prodotto è c. Pertanto, basta risolvere la seguente equazione, detta **equazione risolvente:** $\boldsymbol{t^2-s\,t+p=0}$ con s=-b e p=c.

In base al segno del discriminante abbiamo:

$\Delta>0$ l'equazione risolvente ha soluzioni t_1 e t_2, il sistema ha per soluzioni: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=t_1 \end{cases}$.

$\Delta=0$ la risolvente ha radici coincidenti $t_1=t_2$, le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_1 \\ y_2=t_1 \end{cases}$.

$\Delta<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

Esempi

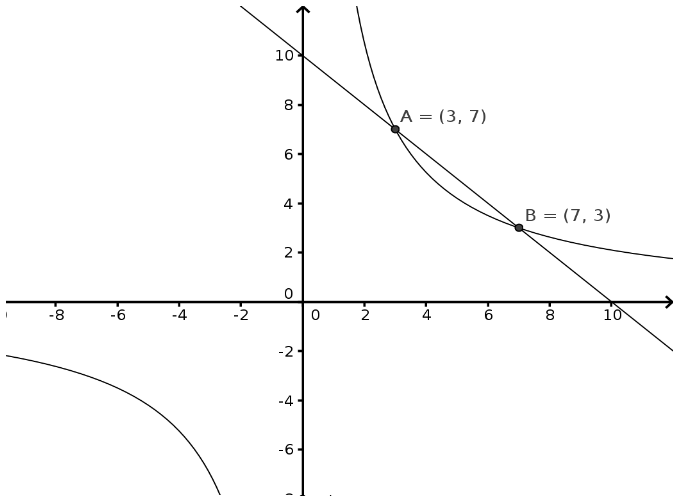
■ $\begin{cases} x+y=10 \\ x\,y=21 \end{cases}$

Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-10\,t+21=0$

Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=7$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=3 \end{cases}$.

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=10$ interseca l'iperbole equilatera $xy=21$ nei due punti $A(7;3)$ e $B(3;7)$.



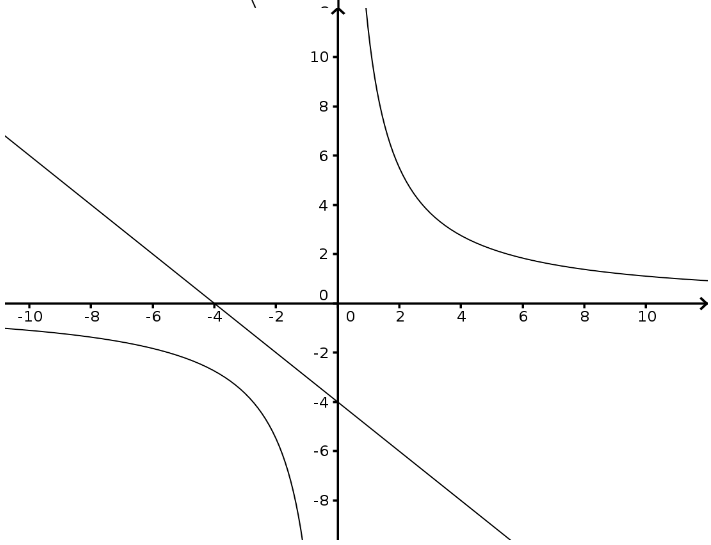
■ $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\,y=11 \end{cases}$

Otteniamo l'equazione risolvente $t^2+4\,t+11=0$

L'equazione risolvente ha discriminante negativo e non ha soluzioni reali

Il sistema è impossibile

Interpretando la situazione nel piano cartesiano, possiamo osservare che la retta $x+y=-4$ non interseca l'iperbole equilatera $xy=11$.



Risolvere i seguenti sistemi simmetrici

44 $\begin{cases}x+y=4\\ xy=3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=1\\ xy=7\end{cases}$ R. $\emptyset$

45 $\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=-6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=-6\end{cases} \vee \begin{cases}x=-6\\ y=1\end{cases}$

46 $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=3\\ xy=-4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$

47 $\begin{cases}x+y=-4\\ xy=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=6\\ xy=9\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$

48 $\begin{cases}x+y=2\\ xy=10\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$

49 $\begin{cases}x+y=-1\\ xy=2\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases}x+y=12\\ xy=-13\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=13\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=13\end{cases}$

50 $\begin{cases}x+y=\frac{6}{5}\\ xy=\frac{9}{25}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=4\\ xy=50\end{cases}$ R. $\emptyset$

51 $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=-14\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=-7\end{cases} \vee \begin{cases}x=-7\\ y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5\\ xy=-14\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=7\\ y=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\ y=7\end{cases}$

52 $\begin{cases}x+y=\frac{1}{4}\\ xy=-\frac{3}{8}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{3}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-10\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1+\sqrt{11}\\ y=1-\sqrt{11}\end{cases} \vee \begin{cases}x=1-\sqrt{11}\\ y=1+\sqrt{11}\end{cases}$

53 $\begin{cases}x+y=4\\ xy=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases} \vee \begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=\frac{5}{2}\\ xy=-\frac{7}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=\frac{7}{2}\end{cases}$

54 $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\\ y=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\\ y=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$

55 $\begin{cases}x+y=\frac{4}{3}\\ xy=-\frac{1}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{4+\sqrt{34}}{6}\\ y=\frac{4-\sqrt{34}}{6}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\frac{4-\sqrt{34}}{6}\\ y=\frac{4+\sqrt{34}}{6}\end{cases}$

56

57 $\begin{cases}x+y=\frac{5}{2}\\ xy=-\frac{9}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{5+\sqrt{97}}{4}\\ y=\frac{5-\sqrt{97}}{4}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\frac{5-\sqrt{97}}{4}\\ y=\frac{5+\sqrt{97}}{4}\end{cases}$

58 $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-\frac{1}{3}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}x=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

59 $\begin{cases}x+y=1\\ xy=-3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\\ y=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

60 $\begin{cases}x+y=4\\ xy=-50\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2+3\sqrt{6}\\ y=2-3\sqrt{6}\end{cases} \vee \begin{cases}x=2-3\sqrt{6}\\ y=2+3\sqrt{6}\end{cases}$

Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici algebrici, possono essere trasformati, in modo equivalente, in sistemi simmetrici del tipo precedente.

Esempio

- $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$

È possibile trasformare il sistema in un sistema simmetrico fondamentale.
Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}$$

Posto $a=s$ e $p=\dfrac{a^2+ab-c}{2}$ i sistemi $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ risultano equivalenti.

Vediamo alcuni esempi di sistemi simmetrici che possono essere risolti con questi metodi.

- $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema simmetrico, otteniamo l'equazione risolvente $t^2-7t+12=0$
Le soluzioni dell'equazione risolvente sono: $t_1=3 \vee t_2=4$

Le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ (x+y)^2-2xy=72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ -2xy=\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ xy=36 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione $t^2+12t+36=0$, otteniamo: $t_1=t_2=-6$, da cui la soluzione $\begin{cases} x_1=-6 \\ y_1=-6 \end{cases}$.

- $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

Dividendo per −3 la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$$\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^2-2xy=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ xy=-\dfrac{10}{9} \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione risolvente $t^2-\dfrac{5}{3}t-\dfrac{10}{9}=0$

Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \vee t_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \\ y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6} \\ y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

61 $\begin{cases}x+y=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

62 $\begin{cases}x+y=3\\x^2+y^2=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2+x+y=1\end{cases}$ R. $\emptyset$

63 $\begin{cases}x+y=4\\x^2+y^2=8\end{cases}$ **R.** $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2-3xy=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

64 $\begin{cases}2x+2y=-2\\(y-x)^2-xy=101\end{cases}$ R. $\begin{cases}x_1=-5\\y_1=4\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=4\\y_2=-5\end{cases}$

65 $\begin{cases}-4x-4y=-44\\2x^2+2y^2-3xy=74\end{cases}$. R. $\begin{cases}x_1=8\\y_1=3\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=3\\y_2=8\end{cases}$

66 $\begin{cases}x+y=3\\x^2+y^2-4x-4y=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$

67 $\begin{cases}x+y=7\\x^2+y^2=29\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

68 $\begin{cases}2x+2y=-2\\4x^2+4y^2=52\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

69 $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4}\\3x^2+3y^2=\dfrac{15}{4}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1\end{cases}$

70 $\begin{cases}x+y=-3\\x^2+y^2-5xy=37\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$

71 $\begin{cases}x+y=-6\\x^2+y^2-xy=84\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=-8\end{cases}\vee\begin{cases}x=-8\\y=2\end{cases}$

72 $\begin{cases}x+y=-5\\x^2+y^2-4xy+5x+5y=36\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-6\end{cases}\vee\begin{cases}x=-6\\y=1\end{cases}$

73 $\begin{cases}x+y=-7\\x^2+y^2-6xy-3x-3y=44\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{13}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{13}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

74 $\begin{cases}x^2+y^2=-1\\x+y=6\end{cases}$ R. $\emptyset$

75 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y=-7\end{cases}$ R. $\emptyset$

76 $\begin{cases}x^2+y^2=18\\x+y=6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$

77 $\begin{cases}x^2+y^2-4xy-6x-6y=1\\x+y=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

78 $\begin{cases}x^2+y^2=8\\x+y=3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\\y=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\\y=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

Esempi

■ $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$

Mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ con la procedura appena vista. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2'=3 \end{cases}$

Dall'uguaglianza $y'=-y \rightarrow y=-y'$ otteniamo le soluzioni del sistema dato $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-3 \end{cases}$.

■ $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$

Riduzione a un sistema simmetrico	Procedura di sostituzione
• Mediante la sostituzione $x'=2x$ e $y'=-3y \rightarrow x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo $\begin{cases} x'+y'=8 \\ \frac{x'}{2}\cdot\left(-\frac{y'}{3}\right)=2 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.	• Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e la sostituiamo nell'altra equazione $\begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ xy=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ 2x^2-8x-6=0 \end{cases}$
• Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1'=4-2\sqrt{7} \\ y_1'=4+2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2'=4+2\sqrt{7} \\ y_2'=4-2\sqrt{7} \end{cases}$	• Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita: $2x^2-8x-6=0$ equivalente a $x^2-4x-3=0$. Applicando la formula ridotta otteniamo: $x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7}$
• Dalle uguaglianza $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$	• Sostituiamo i valori trovati per la x nella equazione di primo grado e troviamo i valori della y $\begin{cases} x_1=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$

79 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ R. (-1; -2), (2;1)

80 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-12 \\ xy=\frac{1}{35} \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{5}\right),\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{7}\right)$

81 $\begin{cases} -2x+y=3 \\ xy=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni di formule dette di Waring, dal nome del matematico che le ha formulate per primo, che potranno essere utili per risolvere i sistemi simmetrici. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono. Indicate come s somma delle variabili e p il loro prodotto queste sono le prime formule fino alla potenza quinta.

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=s^2-2p$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=s^3-3ps$
- $a^4+b^4=(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3=(a+b)^4-6a^2b^2-4ab(a^2+b^2)=$ $=s^4-6p^2-4p(s^2-2p)=s^4-4ps^2+2p^2$
- $a^5+b^5=(a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4=(a+b)^5-5ab(a^3+b^3)-10a^2b^2(a+b)=$ $=s^5-5p(s^3-3ps)-10sp^2=s^5-5ps^3+5p^2s$

Esempi

■ $\begin{cases}x+y=1\\x^3+y^3-2xy=3\end{cases}$

Applicando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases}x+y=1\\(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=1\\(1)^3-3xy(1)-2xy=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=1\\1-5xy=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Da cui l'equazione risolvente $t^2-t-\frac{2}{5}=0\rightarrow 5t^2-5t-2=0$ con $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{10}\vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{10}$

Le soluzioni del sistema sono: $\left(\frac{5-\sqrt{65}}{10};\frac{5+\sqrt{65}}{10}\right),\left(\frac{5+\sqrt{65}}{10};\frac{5-\sqrt{65}}{10}\right)$

■ $\begin{cases}x+y=-1\\x^4+y^4=\frac{7}{2}\end{cases}$

Ricordando l'identità $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases}x+y=-1\\(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=\frac{7}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=-1\\(-1)^4-4xy(-1)^2+2x^2y^2=\frac{7}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=-1\\2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0\end{cases}$$

Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$. L'equazione $2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0$ diventa

$2u^2-4u-\frac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\frac{1}{2}\vee u_2=\frac{5}{2}\rightarrow xy=-\frac{1}{2}\vee xy=\frac{5}{2}$.

Il sistema di partenza è equivalente all'unione $\begin{cases}x+y=-1\\xy=-\frac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x+y=-1\\xy=\frac{5}{2}\end{cases}$.

Il primo sistema $\begin{cases}x+y=-1\\xy=-\frac{1}{2}\end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$ da cui $t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\vee t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Il sistema ha soluzioni $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$

Il secondo sistema $\begin{cases}x+y=-1\\xy=\frac{5}{2}\end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t+\frac{5}{2}=0$, che ha $\Delta<0$, l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

■ $\begin{cases}xy=-2\\x^2+y^2=13\end{cases}$

Dall'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ si ha $\begin{cases}xy=-2\\(x+y)^2-2xy=13\end{cases}\rightarrow\begin{cases}xy=-2\\(x+y)^2-2(-2)=13\end{cases}\rightarrow\begin{cases}xy=-2\\(x+y)^2=9\end{cases}$

Il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$ è equivalente all'unione dei due sistemi fondamentali $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$.

Risolviamo il primo $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2-3t-2=0$ da cui

$t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Il sistema ha soluzioni $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Risolviamo il secondo sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+3t-2=0$

con soluzioni $t_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$

Il sistema ha quindi quattro soluzioni.

■ $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$

Dall'identità $x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)$, il sistema può essere riscritto come:

$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)=-211 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^5-5xy(-1)^3+5x^2y^2(-1)=-211 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$

I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$.

L'equazione $-5x^2y^2+5xy+210=0$ diventa $-5u^2+5u+210=0$ che ha come soluzioni $u_1=-6 \vee u_2=7 \to xy=-6 \vee xy=7$.

Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$

Il primo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t-6=0$ con soluzioni $t_1=-3 \vee t_2=2$. Il sistema ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

Il secondo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t+7=0$, con $\Delta<0$ e insieme soluzione vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ xy=-14 \end{cases}$

Se eleviamo al cubo la seconda equazione otteniamo il sistema equivalente $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ x^3y^3=-2744 \end{cases}$

Mediante le sostituzioni $u=x^3$ e $v=-y^3$ otteniamo $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ con la procedura nota. Le soluzioni sono le seguenti:

$\begin{cases} u_1=8 \\ v_1=343 \end{cases} \vee \begin{cases} u_2=343 \\ v_2=8 \end{cases}$

Dalle uguaglianze $u=x^3 \to x=\sqrt[3]{v}$ e $v=-y^3 \to y=-\sqrt[3]{v}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale

$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

Risolvi i seguenti sistemi di grado superiore al secondo

82 $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^3+y^3=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \end{cases}$

83 $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^3+y^3-xy=-5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\frac{-5-\sqrt{10}}{5} \\ y_1=\frac{-5+\sqrt{10}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-5+\sqrt{10}}{5} \\ y_2=\frac{-5-\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

84 $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^3+y^3=-342 \end{cases}$ R. (1;-7), (-7;1)

85 $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=3 \end{cases}$

86 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

87 $\begin{cases} x^3+y^3=-342 \\ x+y=-6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=1 \end{cases}$

88 $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

89 $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

90 $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

91 $\begin{cases} x^3+y^3=-35 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

92 $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

93 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$

94 $\begin{cases} x+y=-1 \\ 8\,x^4+8\,y^4=41 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2} \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{2} \\ y_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$

95 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$ R $\emptyset$

96 $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

97 $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

98 $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. (1;-2), (-2;1), (-1;2), (2;-1)

99 $\begin{cases} x^5+y^5=64 \\ x+y=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

100 $\begin{cases} x^5+y^5=-2882 \\ x+y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

101 $\begin{cases} x^5+y^5=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\emptyset$

102 $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

103 $\begin{cases}x^4+y^4=337\\ x\,y=12\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases} \vee \begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases} \vee \begin{cases}x=-4\\ y=-3\end{cases}$

104 $\begin{cases}x^3+y^3=\dfrac{511}{8}\\ x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=4\end{cases}$

105 $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x\,y=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$

106 $\begin{cases}x^2+y^2=34\\ x\,y=15\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases} \vee \begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\ y=-5\end{cases} \vee \begin{cases}x=-5\\ y=-3\end{cases}$

107 $\begin{cases}x\,y=1\\ x^2+y^2+3\,x\,y=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

108 $\begin{cases}x\,y=12\\ x^2+y^2=25\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases} \vee \begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases} \vee \begin{cases}x=-4\\ y=-3\end{cases}$

109 $\begin{cases}x\,y=1\\ x^2+y^2-4\,x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

110 $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x\,y=3\end{cases}$ R. $\emptyset$

111 $\begin{cases}x^2+y^2=18\\ x\,y=9\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases}$

112 $\begin{cases}x^2+y^2=8\\ x\,y=-3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}\end{cases}$

113 $\begin{cases}x^2+y^2+3\,x\,y=10\\ x\,y=6\end{cases}$ R. $\emptyset$

114 $\begin{cases}x^2+y^2+5\,x\,y-2\,x-2\,y=3\\ x\,y=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

115 $\begin{cases}x^2+y^2-6\,x\,y+3\,x+3\,y=2\\ x\,y=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3+\sqrt{7}\\ y=-3-\sqrt{7}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3-\sqrt{7}\\ y=-3+\sqrt{7}\end{cases}$

116 $\begin{cases}x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-6\\ x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$

117 $\begin{cases}x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-\dfrac{25}{4}\\ x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\\ y=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\end{cases}$

118 $\begin{cases}x+y=-\dfrac{1}{3}\\ x^5+y^5=-\dfrac{31}{243}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\\ y_1=\dfrac{1}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=\dfrac{1}{3}\\ y_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$

119 $\begin{cases}x+y=1\\ x^5+y^5=-2\end{cases}$ R $\emptyset$

120 $\begin{cases}x+y=1\\ x^5+y^5+7\,xy=17\end{cases}$ R. $\begin{cases}x_1=-1\\ y_1=2\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=2\\ y_2=-1\end{cases}$

►3. Sistemi omogenei di secondo grado

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno tutti i termini con lo stesso grado. I sistemi omogenei di secondo grado sono quindi della forma:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$

Primo caso: d=0 e d' =0

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}$

Un sistema di questo tipo ha sempre almeno la soluzione nulla (0; 0).

Per trovare le soluzioni del sistema poniamo $y=tx$

$\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=0 \end{cases}$

Supponendo $x\neq 0$ possiamo dividere le due equazioni per x^2, otteniamo due equazioni nell'incognita t che possiamo risolvere: se le due equazioni ammettono qualche soluzione comune allora il sistema ammette soluzione. Le soluzioni sono del tipo x=k e y=kt, dove t è la soluzione comune di cui si è detto prima.

Va poi analizzato a parte il caso x=0.

Esempi

■ $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ -x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$

Applichiamo la sostituzione $y=tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2-3tx^2+2t^2x^2=0 \\ -x^2+5tx^2-6t^2x^2=0 \end{cases}$.

Dividendo per x^2 otteniamo $\begin{cases} 1-3t+2t^2=0 \\ 1-5t+6t^2=0 \end{cases}$.

La prima equazione è risolta per $t_1=1\vee t_2=\frac{1}{2}$. La seconda equazione è risolta per $t_1'=\frac{1}{2}\vee t_2'=\frac{1}{3}$

Le due equazioni hanno una radice in comune $t=\frac{1}{2}$. Pertanto oltre alla soluzione (0;0) il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte come $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{2}k \end{cases}$.

■ $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$

Per mezzo della sostituzione y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2-6tx^2+8t^2x^2=0 \\ x^2+4tx^2-5t^2x^2=0 \end{cases}$

Dividendo per x^2 il sistema diventa $\begin{cases} 1-6t+8t^2=0 \\ 1+4t-5t^2=0 \end{cases}$. Risolvendo le due equazioni si trova che non hanno alcuna soluzione in comune, pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla (0; 0).

■ $\begin{cases} -4x^2-7xy+2y^2=0 \\ 12x^2+21xy-6y^2=0 \end{cases}$

Sostituendo y=tx e dividendo per x^2 il sistema diventa $\begin{cases} -4-7t+2t^2=0 \\ 12+21t-6t^2=0 \end{cases}$. Le due equazioni hanno le stesse soluzioni, che sono $t_1=4\,;\,t_2=-\frac{1}{2}$, infatti puoi osservare che la seeconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicandola per -3. Il sistema ammette quindi infinite soluzioni che sono date da

$\begin{cases} x=k \\ y=4k \end{cases};\begin{cases} x=k' \\ y=-\frac{1}{2}k' \end{cases}$. Al variare di k e k' si ottengono tutte le soluzioni del sistema.

Secondo caso se $d=0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=d' \end{cases}$.

Dividiamo per x^2 la prima equazione si ha $\begin{cases} a+bt+ct^2=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Si risolve la prima equazione nell'incognita t; si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di x, infine si possono ricavare anche i valori di y.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=0 \\ -x^2+2xy-3y^2=-6 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} 1-t-6t^2=0 \\ x^2(-1+2t-3t^2)=-6 \end{cases}$

La prima equazione ha per soluzioni $t_1=\frac{1}{3}$ e $t_2=-\frac{1}{2}$.

Sostituendo $t=\frac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x=\pm 3$ da cui $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases};\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-1 \end{cases}$

Sostituendo $t=-\frac{1}{2}$ si ottengono le soluzioni $x_1=\frac{2\sqrt{66}}{11}$ e $x_2=\frac{-2\sqrt{66}}{11}$.

Le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_3=2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_3=-\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases};\begin{cases} x_4=-2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_4=\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}$

Terzo caso se $d\neq 0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=d \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Dividendo membro a membro le due equazioni, otteniamo $\frac{a+bt+ct^2}{a'+b't+c't^2}=\frac{d}{d'}$

da cui $d'(a+bt+ct^2)=d(a'+b't+c't^2)$ da cui $(cd'-c'd)t^2+(bd'-b'd)t+ad'-a'd=0$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita t. Trovate le soluzioni t_1 e t_2 dobbiamo poi risolvere i sistemi $\begin{cases} y=t_1x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases};\begin{cases} y=t_2x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Esempio

■ $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=-68 \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1+3t-t^2)=-68 \\ x^2(-2+t+3t^2)=88 \end{cases}$ da cui $\frac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2}=-\frac{68}{88}$, da cui

l'equazione $29t^2+83t-12=0$. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $t_1=\frac{4}{29};t_2=-3$.

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi: $\begin{cases} y=\frac{4}{29}x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases};\begin{cases} y=-3x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=6 \end{cases};\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-6 \end{cases}$.

Queste sono le uniche soluzioni del sistema.

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici

121 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

122 $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$

123 $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ 4x^2-2xy-6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$

124 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

125 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+2xy-8y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

126 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+5xy+6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

127 $\begin{cases} x^2+7xy+12y^2=0 \\ 2x^2+xy+6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

128 $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=0 \\ 2x^2+12xy+16y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4t \\ y=t \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

129 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$

130 $\begin{cases} x^2+4xy=0 \\ x^2+2xy-4y^2-4=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

131 $\begin{cases} x^2-8xy+15y^2=0 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

132 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 \\ x^2-y^2=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

133 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2-3xy-y^2=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

134 $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ R. impossibile

135 $\begin{cases} 6x^2+5xy+y^2=12 \\ x^2+4xy+y^2=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-4\sqrt{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=4\sqrt{6} \end{cases}$

136 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-4xy+y^2=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

137 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

138 $\begin{cases} x^2-3xy+5y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

139 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-3xy+y^2=11 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

140 $\begin{cases} x^2+5xy+4y^2=10 \\ x^2-2xy-3y^2=-11 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

141 $\begin{cases} 4x^2-xy-y^2=-\frac{1}{2} \\ x^2+2xy-y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

142 $\begin{cases} x^2-xy-8y^2=-8 \\ x^2-2y^2-xy=16 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

143 $\begin{cases} x^2-6xy-y^2=10 \\ x^2+xy=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

144 $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=32 \\ x^2+3y^2-9xy=85 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$

145 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=8 \\ 3x^2-y^2+xy=-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{10}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

146 $\begin{cases} x^2+5xy-7y^2=-121 \\ 3xy-3x^2-y^2=-7 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{18}{7} \\ y=-\frac{37}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{18}{7} \\ y=\frac{37}{7} \end{cases}$

147 $\begin{cases} x^2-5xy-3y^2=27 \\ -2x^2-2y^2+4xy=-50 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{34}{7} \\ y=-\frac{1}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{34}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$

148 $\begin{cases} 9x^2+5y^2=-3 \\ x^2+4xy-3y^2=8 \end{cases}$ R. impossibile

149 $\begin{cases} 2x^2-4xy-3y^2=18 \\ xy-2x^2+3y^2=-18 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

150 $\begin{cases} x^2+2xy=-\frac{7}{4} \\ x^2-4xy+4y^2=\frac{81}{4} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=-\frac{11}{8} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{7}{4} \\ y=\frac{11}{8} \end{cases}$

151 $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16=0 \\ x^2-xy+4y^2-6=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

152 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-1=0 \\ x^2-2xy-y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi particolari

153 $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $(1;1),(3;-3)$

154 $\begin{cases} (x-2y)(x+y-2)=0 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$ R. $(3;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

155 $\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(1;0),(-3;-2)$

156 $\begin{cases} (x-3y)(x+5y-2)=0 \\ (x-2)(x-y+4)=0 \end{cases}$ R. $(2;0),\left(2;\frac{2}{3}\right);(-6;-2);(-3;1)$

157 $\begin{cases} (x^2-3x+2)(x+y)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ doppia; $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

158 $\begin{cases} (x-y)(x+y+1)(2x-y-1)=0 \\ (x-3y-3)(x+y-2)=0 \end{cases}$ R. $(0;-1)$ doppia $;\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right);(1;1)$ doppia

159 $\begin{cases} (4x^2-9y^2)(x^2-2xy+y^2-9)=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ R. $(5;8);\left(\frac{3}{2};1\right);(-1;-4);\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$

160 $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4=0 \\ (x^2-y^2)(2x-y-4)=0 \end{cases}$ R. $(1;-1),(2;0),(-1;1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right)$

161 $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 \\ (x+y)(x-3)=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$ doppia $,\left(3;-\frac{3}{2}\right);(3;\frac{3}{4})$

162 $\begin{cases} (2x^2-3xy+y^2)(x-y-1)=0 \\ (x^2-4xy+3y^2)(12x^2-xy-y^2)=0 \end{cases}$ R. $(t;t),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

163 $\begin{cases} (x-2y-2)(x^2-9y^2)=0 \\ (4x^2-4xy+y^2)(y+2)(x-y)=0 \end{cases}$ $(0;0)$ tripla $,(-2;-2)$ doppia $,\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ doppia $,(6;-2),(-6;-2)$

164 $\begin{cases} x^4-y^4=0 \\ x^2-(y^2-6y+9)=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

165 $\begin{cases} (y^2-4y+3)(x^2+2x-15)=0 \\ (x^2-3xy+2y^2)(9x^2-6xy+y^2)=0 \end{cases}$

R. $(1;1),(2;1)(3;3)$ doppia $,(6;3),\left(\frac{1}{3};1\right),(1;3),(-5;-5),\left(-5;-\frac{5}{2}\right),\left(3;\frac{3}{2}\right),(-5;-15),(3;9)$

166 $\begin{cases} (x-y)(x+4y-4)(x+y-1)(3x-5y-2)=0 \\ (3x+y-3)(x^2-4y^2)=0 \end{cases}$

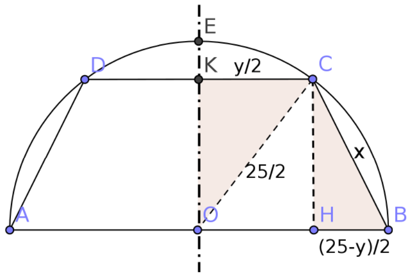
R. $(0;0)$ doppia $,\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),(1;0),\left(\frac{8}{11,}\frac{9}{11}\right),\left(\frac{17}{18};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right),(-4;2)(2;-1),\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{11};-\frac{2}{11}\right),(4;2)$

►4. Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

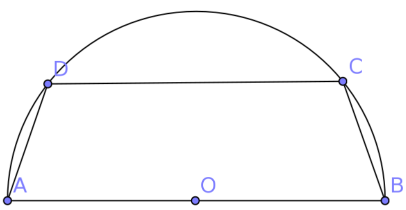
Riprendiamo un problema già trattato nel capitolo secondo di questo volume, per notare come questo problema, come altri nella loro formalizzazione sono risolvibili con sistemi di secondo grado.
Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico delle relazioni che coinvolgono i dati del problema. Utilizzeremo per questo problema anche un'altra strategia risolutiva, per evidenziare che non esiste un solo modo per risolvere un problema..

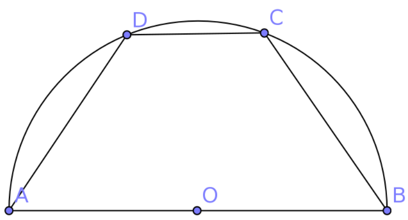
<u>Problema</u>

Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura $25(cm)$; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è $62(cm)$.

<u>Dati</u>	<u>Vincoli</u>	<u>Relazioni tra dati e incognite</u>	
$\overline{AB}=25$ $2p=62$ $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$ $\overline{AD}\equiv\overline{CB}$ <u>Obiettivo</u> $?\ \overline{CB}$ $?\ \overline{DC}$ <u>Incognite</u> $\overline{CB}=x$ $\overline{DC}=y$	$\begin{cases}0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2}\\0<y<25\end{cases}$ <u>Altre Informazioni</u> $\overline{KO}=\overline{CH}$ $\overline{CO}=\frac{25}{2}$ $\overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2}$ $\overline{HB}=\frac{25-y}{2}$ $\widehat{CKO}=90°$ $\widehat{CHB}=90°$	$\begin{cases}y+2x+25=62\\\left(\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2\right)\end{cases}$ $\begin{cases}y=-2x+37\\x^2-25x+150=0\end{cases}$ <u>Soluzioni</u> $\begin{cases}x_1=15\\y_1=7\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=10\\y_2=17\end{cases}$ <u>Verifica</u> Entrambe le soluzioni sono accettabili	

La risoluzione del problema si basa oltre che sulla <u>equazione</u> di primo grado $y+2x+25=62$ che definisce il perimetro e sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele insieme all'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli CKB e CHB rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità la lasciamo al lettore.
Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche per la $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo e per la $y<25$ perché la base minore sia realmente minore.
L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzione, che nel nostro caso sono entrambe accettabili.
Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62(cm), come rappresentato in figura.





Problema

L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per gli operai (tutti con lo stesso stipendio) 800 € al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di 2 € al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di 200 €. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

Dati

- Spesa per salari al giorno= 800 €
- Riduzione salario giornaliero= 2 €
- Riduzione numero operai= 5 *unità*
- Risparmio a seguito del licenziamento e della riduzione di stipendio= 200 €

Obiettivo

- Numero operai occupati prima della ristrutturazione

Incognite

- x = numero operai prima della ristrutturazione
- y = salario percepito prima della ristrutturazione

Vincoli

- $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Altre Informazioni

- Numero operai dopo la ristrutturazione= $x-5$
- Salario dopo la ristrutturazione= $y-2$
- Spesa per stipendi dopo la ristrutturazione= $800-200=600$ €

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} xy=800 \\ (x-5)(y-2)=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ xy-2x-5y+10=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ 2x+5y=210 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=25 \\ y_1=32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=80 \\ y_2=10 \end{cases}$$

Verifica

Entrambe le soluzioni sono accettabili

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32 €/giorno di salario al giorno o 10 €/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Basterebbe per questo un vincolo che ci dice qual'è la paga minima giornaliera di un operaio.

Problema

Un numero $k \in \mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera k di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero k. Trovare k.

Dati

- Il numero k è composto da tre cifre
- Prodotto delle tre cifre = 42
- Scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia, il numero l che si ottiene è uguale a $k+360$
- Scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, il numero m che si ottiene è uguale a $k-99$

Obiettivo

- Trovare il numero k

Incognite

- x = cifra che rappresenta il numero delle centinaia
- y = cifra che rappresenta il numero delle decine
- z = cifra che rappresenta il numero delle unità

Vincoli

$$\begin{cases} x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ y, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Altre Informazioni

- $k=100x+10y+z$
- $l=100y+10x+z$
- $m=100z+10y+x$

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+360 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ x-y=-4 \\ x-z=1 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \\ z_1=2 \end{cases}$$

Verifica

La soluzione soddisfa le condizioni il numero cercato è 372

167 In un rettangolo la differenza tra i due lati è uguale a $2\,cm$. Se si diminuiscono entrambi i lati di 1 cm si ottiene un'area di $0{,}1224\,m^2$. Calcolare il perimetro del rettangolo. R. $[2p=144\,cm]$

168 Trova due numeri sapendo che la somma tra i loro quadrati è 100 e il loro rapporto 3/4.
R. $[(-6;-8)\vee(6{,}8)]$

169 La differenza tra due numeri è 11/4 e il loro prodotto 21/8. Trova i due numeri. R. (-3/4; -7/2), (7/2;3/4)

170 Trovare due numeri positivi sapendo che la metà del primo supera di 1 il secondo e che il quadrato del secondo supera di 1 la sesta parte del quadrato del primo. R. $[(12;5)]$

171 Data una proporzione tra numeri naturali conosciamo i due medi che sono 5 e 16. Sappiamo anche che il rapporto tra il prodotto degli estremi e la loro somma è uguale a 10/3. Trovare i due estremi. R. $[(4;20)\vee(20{,}4)]$

172 La differenza tra un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 36. La differenza tra il prodotto delle cifre e la loro somma è uguale a 11. Trovare il numero. R. $[73]$

173 Oggi la differenza delle età tra un padre e una figlia è 26 anni, mentre due anni fa il prodotto delle loro età era 56. Determina l'età del padre e della figlia. R. $[30;4]$

174 La somma delle età di due fratelli oggi è 46 anni, mentre fra due anni la somma dei quadrati delle loro età sarà 1250. Trova l'età dei due fratelli.
R. $[23;23]$

175 Ho comprato due tipi di vino. In tutto 30 bottiglie. Per il primo tipo ho speso 54 € e per il secondo 36€. Il prezzo di una bottiglia del secondo tipo costa 2,5 € in meno di una bottiglia del primo tipo. Trova il numero delle b ottiglie di ciascun tipo che ho acquistato e il loro prezzo unitario.
R. $[I\ tipo=12\ bottiglie\ ;\ II\ tipo=18\ bottiglie]$

176 In un triangolo rettangolo di area $630\,m^2$, l'ipotenusa misura $53\,m$. Determinare il perimetro $[2p=126\,m]$.

177 Un segmento di $35\,cm$ viene diviso in due parti. La somma dei quadrati costruiti su ciascuna delle due parti è $625\,cm^2$. Quanto misura ciascuna parte? R. $[15\,cm \text{ e } 20\,cm]$.

178 Se in un rettangolo il perimetro misura 16,8 m. e l'area 17,28 mq, quanto misura la sua diagonale?
R. $[Diagonale=6\,m]$

179 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 10,5 cm, mentre l'ipotenusa è 7,5 cm. Trovare l'area. R. $[Area=13{,}5\,cm^2]$

180 Quanto misura un segmento diviso in due parti, tali che una parte è 3/4 dell'altra, sapendo che la somma dei quadrati costruiti su ognuna delle due parti è uguale a $121\,cm^2$? R. $[15{,}4\,cm]$

181 Un trapezio rettangolo con area di $81\,m^2$ la somma della base minore e dell'altezza è $12\,cm$ mentre la base minore è 1/5 della base maggiore. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $2p_1=42 \vee 2p_2=57+3\sqrt{145}$

182 La differenza tra le diagonali di un rombo è $8\,cm$, mentre la sua area è $24\,cm^2$. Determinare il lato del rombo. R. $[2\sqrt{10}]$

183 Sappiamo che in un trapezio rettangolo con area di $40\,cm^2$ la base minore è $7\,cm$, mentre la somma della base maggiore e dell'altezza è $17\,cm$. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $[2p=24+2\sqrt{13}]$

184 Nella produzione di un oggetto la macchina A impiega 5 minuti in più rispetto alla macchina B. Determinare il numero di oggetti che produce ciascuna macchina in 8 ore se in questo periodo la macchina A ha prodotto 16 oggetti in meno rispetto alla macchina B. $[A=32\ oggetti\ ,\ B=48\ oggetti]$

185 Un rettangolo ha l'area equivalente a quella di un quadrato. L'altezza del rettangolo è $16\,cm$, mentre la sua base è di $5\,cm$ maggiore del lato del quadrato. Determinare il lato del quadrato.
R. $[20\,cm]$

186 La differenza tra cateto maggiore e cateto minore di un triangolo rettangolo è $7\,k$, mentre la sua area è $60\,k^2$. Calcola il perimetro. (k>0)
R. $[2p=40\,k]$

187 L'area di un rettangolo che ha come lati le diagonali di due quadrati misura $90\,k^2$. La somma dei lati dei due quadrati misura $14\,k$. Determinare i lati dei due quadrati. (k>0) R. $[5\,k\,,9\,k]$

188 Nel rettangolo ABCD la differenza tra altezza e base è $4\,k$. Se prolunghiamo la base ab, dalla parte di B di $2\,k$ fissiamo il punto E. L'area del trapezio AECD che si ottiene congiungendo E con C è $28\,k^2$. Trovare il perimetro del trapezio. (k>0)
R. $[15+k\sqrt{53}]$

189 In un triangolo isoscele la base è 2/3 dell'altezza. La sua area misura $12\,k^2$. Trova il perimetro del triangolo.
R. $[4+4\,k\sqrt{10}]$

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

6. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI



Sails by Cseward
http://www.flickr.com/photos/cseward/2823465045

Indice

►1. Valore assoluto

Il valore assoluto o modulo di un numero a, indicato con $|a|$, è lo stesso numero se a è maggiore o uguale a zero, il suo opposto, cioè $-a$, se a è minore di zero. In sintesi scriviamo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio $|+7| = 7$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|0| = 0$; $|-1| = 1$; $|1| = 1$.

Nello stesso modo definiamo il valore assoluto di una espressione algebrica.

Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $E = x^2 - 3x$, indicato con $|x^2 - 3x|$, è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio, precisamente: $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$;

risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geq 0$ si esplicitano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche. Otteniamo dunque $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 0 \lor x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$

> In generale, la funzione valore assoluto di un'espressione algebrica, detta **argomento del valore assoluto**, viene esplicitata nei due casi generati dallo studio del segno dell'argomento:
> $$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

■ Per la funzione $f(x) = |\sqrt{3} + 3x|$ trovare le espressioni algebriche che descrivono i due casi, ciascuno con il suo dominio.

Strategia risolutiva. Per la definizione si ha:

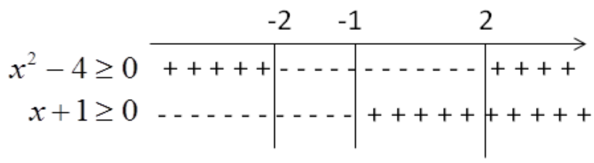
$$f(x) = |\sqrt{3} + 3x| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x & \text{se } \sqrt{3} + 3x \geq 0 \rightarrow x \geq \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{se } \sqrt{3} + 3x < 0 \rightarrow x < \ldots\ldots \end{cases}$$

■ Descrivere per casi, eliminando i valori assoluti, la funzione $f(x) = |x^2 - 4| + |x + 1| - 2x$

Dobbiamo studiare i segni dei due binomi in valore assoluto

$x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \lor x \geq 2$

$x + 1 \geq 0 \rightarrow x > -1$



La situazione è rappresentata con maggiore chiarezza nel grafico.

Nell'intervallo $x < -2$ il primo argomento di valore assoluto è positivo e il secondo è negativo.
Nell'intervallo $-2 \leq x < -1$ tutti e due gli argomenti di valore assoluto sono negativi.
Nell'intervallo $-1 \leq x < 2$ il primo argomento di valore assoluto è positivo, il secondo è negativo
Nell'intervallo $x \geq 2$ entrambi gli argomenti sono positivi.

In sintesi $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4) - (x + 1) - 2 & \text{se } x < -2 \\ -(x^2 - 4) - (x + 1) - 2x & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ -(x^2 - 4) + (x + 1) - 2x & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ +(x^2 - 4) + (x + 1) - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Scrivi l'espressione algebrica che descrive i due casi della funzione, ciascuno con il suo dominio

1 $f(x) = |-2x + 5|$ $\quad f(x) = |x - 1|$ $\quad f(x) = |-x|$

2 $f(x) = |-x^2 + 4|$ $\quad f(x) = |x^2 + 1|$ $\quad f(x) = |x^2 - 3x + 1|$

3 $f(a) = |2a - 2|$ $\quad f(p) = \left|3p^2 - \frac{1}{2}\right|$ $\quad f(a) = |-2a^2 - 1|$

4 $f(x) = \left|\frac{1}{x - 1}\right|$ $\quad f(x) = \left|\frac{2x}{x - 2}\right|$ $\quad f(x) = \left|\frac{x + 1}{2x - 1}\right|$

5 $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ $\quad f(x) = |3x - 2| - |7x + 1|$ $\quad f(x) = -|x + 2| + |x - 2| - x$

6 $f(x) = |x^2 + 1| - |x^2 - 1|$ $\quad f(x) = \left|\frac{1}{x}\right| - |x|$ $\quad f(x) = \left|\frac{x + 2}{x - 1}\right| + |x^2 + 4x + 3| + 1$

►2. Equazioni in una incognita in valore assoluto

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k\geq 0$

L'incognita è presente solo all'interno del modulo.

Esempi

■ $|x^2-7|=3$

Ricordiamo che $|x^2-7|=x^2-7$ se $x^2-7\geq 0$ mentre $|x^2-7|=-x^2+7$ se $x^2-7<0$.

Pertanto l'equazione diventa $x^2-7=3$ se $x^2-7\geq 0$ e $-x^2+7=3$ se $x^2-7<0$. Il tutto si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases}x^2-7\geq 0\\ x^2-7=3\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-7<0\\ -x^2+7=3\end{cases}$.

Moltiplicando per -1 l'equazione del secondo sistema otteniamo $\begin{cases}x^2-7\geq 0\\ x^2-7=3\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-7<0\\ x^2-7=-3\end{cases}$.

Si vede abbastanza facilmente che sia nel primo che nel secondo sistema le due disequazioni sono sempre verificate. Infatti, nel primo sistema l'equazione $x^2-7=3$ verifica automaticamente la disequazione $x^2-7\geq 0$ in quanto è richiesto che x^2-7 sia uguale a 3, pertanto è necessariamente positivo. Stesso ragionamento vale per il secondo sistema. In altre parole, per risolvere la disequazione data è sufficiente risolvere le due equazioni $(x^2-7=3)\vee(x^2-7=-3)$ unendone le soluzioni.

$x^2-7=3 \rightarrow x^2=10 \rightarrow x_1=-\sqrt{10}\vee x_2=\sqrt{10}$

$x^2-7=-3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_3=-2\vee x_4=2$

. Le soluzioni sono quindi: $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2, +2\}$

■ $|x^2-x|=1$

L'equazione $|x^2-x|=1$ si risolve unendo gli insiemi soluzione delle equazioni $x^2-x=1$ e $x^2-x=-1$.

$x^2-x=1 \rightarrow x^2-x-1=0 \rightarrow x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vee x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x=-1 \rightarrow x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow \emptyset$

. L'Insieme Soluzione è $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Procedura risolutiva. Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)|=k$ con $k\in\mathbb{R}\wedge k\geq 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $f(x)=\pm k$.

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k<0$

Se $k<0$ l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)|=k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione dà un valore sempre positivo.

■ $|x-7|=-1$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale presentato prima.

$\begin{cases}x-7\geq 0\\ x-7=-1\end{cases}\cup\begin{cases}x-7<0\\ x-7=1\end{cases}$ Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è impossibile.

Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto

7 $|x-2x^2|=1$ R. $x_1=1; x_2=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $|-x^2-4|=9$ R. $x_1=\sqrt{5}; x_2=-\sqrt{5}$

8 $|x^2-x|=-3$ R. $\emptyset$ $\qquad$ $|x^2+1|=0$ R. $\emptyset$

9 $|2x+1|=2$ R. $x_1=-\frac{3}{2}; x_2=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $|x^2-3x+1|=1$ R. 0; 1; 2; 3

10 $|x^2+1|=3$ R. $\pm\sqrt{2}$ $\qquad$ $|x^2-1|=3$ R. -2; +2

11 $|x^2-7|=3$ R. $\pm\sqrt{10}; \pm 2$ $\qquad$ $6|x^2-1|=0$ R. -1; +1

12 $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\right|=-1$ R. $\emptyset$ $\qquad$ $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\right|=1$ R. $\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

13 $\frac{5}{|x^2-1|}=1$ R. $\pm\sqrt{6}$ $\qquad$ $\left|\frac{x^2-5x+1}{2x^2+3x-1}\right|=1$ R. $0; \frac{2}{3}; -4\pm 3\sqrt{2}$

14 $4|x^2-x|=1$ R. $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}$

Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

■ $|-1+3x|=7x+4$.

Osserviamo che il primo membro dell'equazione presenta un valore assoluto.

Esplicito i due casi dell'argomento $|-1+3x|=\begin{cases} -1+3x & \text{se } -1+3x\geq 0 \rightarrow x\geq\frac{1}{3} \\ 1-3x & \text{se } -1+3x<0 \rightarrow x<\frac{1}{3} \end{cases}$

Modifico l'equazione tenendo conto dei casi: $A]\begin{cases} x\geq\frac{1}{3} \\ -1+3x=7x+4 \end{cases}$ $B]\begin{cases} x<\frac{1}{3} \\ 1-3x=7x+4 \end{cases}$

Risolvo i due sistemi $A]\begin{cases} x\geq\frac{1}{3} \\ 4x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{4} \end{cases}$ $B]\begin{cases} x<\frac{1}{3} \\ 10x=3 \rightarrow x=\frac{3}{10} \end{cases}$

Unisco le soluzioni, tenendo conto che nel primo sistema la soluzione -5/4 non è accettabile in quanto non è maggiore di 1/3. Pertanto: $I.S._A\cup I.S._B=\emptyset\cup\left\{\frac{3}{10}\right\}=\left\{\frac{3}{10}\right\}\rightarrow x=\frac{3}{10}$

■ $|-2x+5|=x-3$

Esplicito i due casi dell'argomento $|-2x+5|=\begin{cases} -2x+5 & \text{se } -2x+5\geq 0 \rightarrow x\leq\frac{5}{2} \\ 2x-5 & \text{se } -2x+5<0 \rightarrow x>\frac{5}{2} \end{cases}$

Riscrivo l'equazione assegnata in forma di due sistemi $A]\begin{cases} x\leq\frac{5}{2} \\ -2x+5=x-3 \end{cases}$ $B]\begin{cases} x>\frac{5}{2} \\ 2x-5=x-3 \end{cases}$

Risolvo ciascun sistema $A]\begin{cases} x\leq\frac{5}{2} \\ -3x=-8 \rightarrow x=\frac{8}{3} \end{cases}$ $B]\begin{cases} x>\frac{5}{2} \\ x=2 \end{cases}$ quindi $I.S._A=\emptyset;\ I.S._B=\emptyset$

Unisco i due insiemi soluzione $I.S._A\cup I.S._B=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$: l'equazione impossibile.

■ $|2x-1|=x+2$

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ 2x-1=x+2 \end{cases}\cup\begin{cases} 2x-1<0 \\ -2x+1=x+2 \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x\geq\frac{1}{2} \\ x=3 \end{cases}\cup\begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ le soluzioni sono $x=3\vee x=-\frac{1}{2}$.

Procedura risolutiva

Per risolvere un'equazione in cui l'incognita compare sia nel modulo sia fuori dal modulo, si pongono le condizioni iniziali sull'espressione che è all'interno del modulo e si vanno a risolvere due sistemi uniti dal connettivo logico "o".

Nel primo sistema vi sarà la condizione $\boldsymbol{f(x)\geq 0}$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo.

Nel secondo sistema vi sarà la condizione $\boldsymbol{f(x)<0}$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo e cambiando il segno a tutto ciò che vi era all'interno.

Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni con valore assoluto definite in $\mathbb{R}$

15 $|x-1|=x$ R. $x=\frac{1}{2}$

16 $|x^2-4|=3x-1$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2}; x_2=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$

17 $|2-x|=4-x^2$ R. $x_1=2; x_2=-1$

18 $|x^2+2|=1-x^2$ R. $\emptyset$

19 $|-x^2+2x-3|=x+1$ R. $x_1=2; x_2=1$

20 $|-x^2+4x-7|=3-2x$ R. $\emptyset$

21 $|2-4x|=4(x-1)(x+2)$ R. $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}; x_2=-\frac{2+\sqrt{14}}{2}$

22 $|x^2-4x+3|=4x-6$ R. $x_1=\sqrt{3}; x_2=4+\sqrt{7}$

23 $|1-2x|=5x-7$ R. $x=2$

24 $|x^3-x^2|=x-1$ R. $x=1$

25 $|x^2-3x+2|=x+1$ R. $x_1=2+\sqrt{3}; x_2=2-\sqrt{3}$

26 $|x^2+1|=3+x$ R. $x_1=2; x_2=-1$

27 $|-x^2-4x-8|=3x-2-x^2$ R. $\emptyset$

28 $|2x^2-3x|=-x$ R. 0

29 $|x^3-4x^2|=1-4x$ R. $x_1=-1; x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$

30 $|x^4-3x^2|=x^2-2$ R. $\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}; \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$

31 $|x^4-5x^2|=5-x^2$ R. $x_1=1; x_2=-1; x_3=\sqrt{5}; x_4=-\sqrt{5}$

32 $|9-x^2|=x^2-3x+4$ R. $x_1=-1; x_2=\frac{13}{3}; x_3=\frac{5}{2}$

33 $|x^2-2x-5|=4-\frac{1}{4}x^2$ R. $x_1=\frac{18}{5}; x_2=-2; x_3=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$

34 $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $x_1=2;\ x_2=3$

35 $|x+5|=x^2-1$ R. $x_1=-2;\ x_2=3$

36 $|2x-6|=7-2x^2$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

37 $|x^2-4|=x+8$ R. $[x_1=-3;\ x_2=4]$

38 $|x^2+1|=5-x$ R. $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

39 $|x^4-x^2|=x^2+8$ R. $[x_1=-2;\ x_2=2]$

40 $|x^4-9|=x^2$ R. $\frac{\pm\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2}; \pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}$

41 $|1-x^2|=4x^2+x$ R. $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{10};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{10}$

42 $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $\emptyset$

43 $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $x_1=2;\ x_2=3$

44 $|x^2-1|=x^2-1$ R. $x\le-1 \vee x\ge1$

45 $|x^2-5x+6|=3x^2-x$ R. $x_1=-3;\ x_2=1$

46 $|x^2-3|=x^2-6x+9$ R. $x=2$

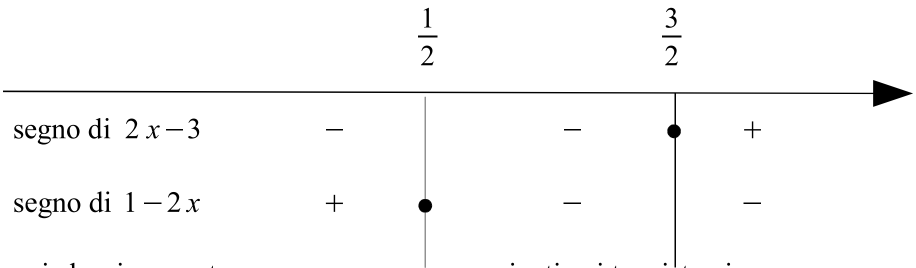
47 $|1-3x|=\frac{(x-3)^2}{1-2x}$ R. $x=-\frac{\sqrt{161}+1}{10}$

48 $\left|\frac{1-3x}{1-2x}\right|=\frac{x^2-3x+2}{1-2x}$ R. impossibile

►3. Equazioni con più espressioni in valore assoluto

■ $|2x-3|-|1-2x|=4$

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna di esse sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno quattro casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento possiamo procedere studiando il segno di ciascun argomento e confrontarli servendoci del seguente schema:



I casi che si presentano possono essere esaminati nei tre sistemi:

$A.\begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \end{cases}$ $B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases}$ $C.\begin{cases} x\ge \frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases}$

Dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo

$A.\begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \rightarrow x=2 \end{cases} \rightarrow I.S._A=\emptyset \quad \left(2 \text{ non è minore di } \frac{1}{2}\right)$

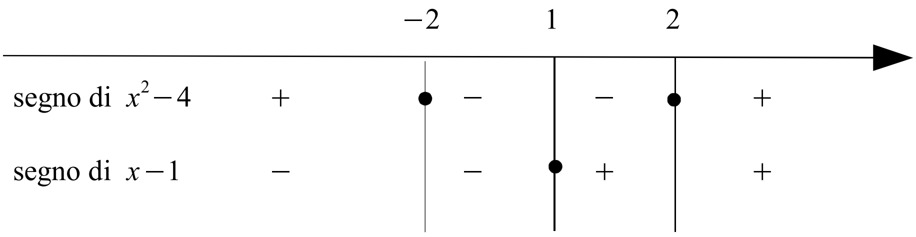
$B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \rightarrow x=0 \end{cases} \rightarrow I.S._B=\emptyset \quad \text{(0 non appartiene all'intervallo considerato)}$

$C.\begin{cases} x> \frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \rightarrow x=6 \end{cases} \rightarrow I.S._C=\{6\} \quad \text{soluzione accettabile}$

Conclusione: $I.S.=I.S._A\cup I.S._B\cup I.S._C=\{6\}$

■ $|x^2-4|-3x=|x-1|$

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:



In questo caso dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

$A.\begin{cases} x\le -2 \\ x^2-4-3x=-x+1 \rightarrow x^2-2x-5=0 \rightarrow x_1=1-\sqrt{6}\vee x_2=1+\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow I.S._A=\emptyset$

$B.\begin{cases} -2<x<1 \\ -x^2+4-3x=-x+1 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x_1=-3\vee x_2=1 \end{cases} \rightarrow I.S._B=\emptyset$

$C.\begin{cases} 1\le x<2 \\ -x^2+4-3x=x-1 \rightarrow x^2+4x-5=0 \rightarrow x_1=-5\vee x_2=1 \end{cases} \rightarrow I.S._C=\{1\}$

$D.\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-4-3x=x-1 \rightarrow x^2-4x-3=0 \rightarrow x_1=2-\sqrt{7}\vee x_2=2+\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow I.S._D=\{2+\sqrt{7}\}$

Conclusione: $i.S.=I.S._A\cup I.S._B\cup I.S._C\cup I.S._D=\{1\,;\ 2+\sqrt{7}\}$

Procedura per risolvere una equazione con la presenza di uno o più valori assoluti

Si possono verificare tre casi:

1. L'incognita è presente solo nell'argomento del modulo: $|f(x)|=k$, l'equazione si risolve ponendo: $f(x)=\pm k$
   - Se $k<0$ l'equazione è impossibile
2. L'incognita si trova anche al di fuori del modulo; in questo caso si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione dei due sistemi.
3. Se è presente più di un modulo, si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'Insieme Soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione di ogni sistema.

Risolvi le seguenti equazioni con due valori assoluti

49 $|x-2|+|5-2x|=x-1$ R. $x_1=2\,;x_2=3$

50 $|x^2-4x+3|=1-2|4-x^2|$ R. $x=2$

51 $|x-1|=x^2-x+|3-x^2|$ R. $\emptyset$

52 $|3x-2|=x^2-|x^2-x|+3$ R. $x_1=\frac{5}{2}\,;x_2=-\frac{1}{4}$

53 $|3x-x^2-2|=\frac{1}{2}+x^2-x-2|1-x^2|$ R. $x_1=\frac{9}{8}\,;x_2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

54 $|2x-5|+|x^2-1|=x-2$ R. $\emptyset$

55 $|x-2|=|x^2-4|$ R. $x_1=-3\,;x_2=-1\,;x_3=2$

56 $|x-2|=|x^2-4|+1$ R. $x_1=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\,;x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

57 $|x-2|=|x^2-4|+4$ R. $x=-2$

58 $|x-2|=|x^2-4|+5$ R. $\emptyset$

59 $|x^2-3x|=x|x|$ R. $x_1=0\,;x_2=\frac{3}{2}$

60 $|x-1|(x+1)=|2x-4|$ R. $x=\sqrt{6}-1$

61 $|x^2-5x+6|=(3-x)|x^2+x-2|$ R. $x_1=0\,;x_2=3\,;x_{3,4}=-1\pm\sqrt{5}$

62 $|x|^2-|x|=2$ R. $x_1=2\,;x_2=-2$

63 $|x|^2+3|x|+2=0$ R. $\emptyset$

64 $|x|^2-5|x|+6=0$ R. $x_1=2\,;x_2=-2\,;x_3=3\,;x_4=-3$

65 $|4x-x^2|-2x=2|x^2-9|$ R. $x_1=-3-3\sqrt{3}\,;x_2=1-\sqrt{7}$

66 $(x-1)^2|x|=x^2-1$ R. $x_1=1\,;x_2=1+\sqrt{2}$

67 $|x|=3x-|x^2-1|$ R. $x_1=\sqrt{2}-1\,;x_2=\sqrt{2}+1$

68 $|x-2|+|x|=1+x^2$ R. $x_1=1\,;x_2=-1-\sqrt{2}$

69 $|3x-6|+|4x-x^2|=x+3$ R. $x_1=3\,;x_2=\sqrt{3}\,;x_3=1+\sqrt{10}$

70 $|x^2-4|+1-2x=2x^2+|x+2|$ R. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

71 $x+|x^2+x-6|=\frac{1}{4}(x^2+10x+25)$ R. $x_{1,2}=\frac{-5\pm2\sqrt{5}}{5}\,;x_{3,4}=\frac{1\pm2\sqrt{37}}{3}$

72 $x+2|-x-1|=x^2-|x|$ R. $x_1=1-\sqrt{3}\,;x_2=2+\sqrt{6}$

73 $|x^3-4x|=|x|$ R. $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}\,;x_{3,4}=\pm\sqrt{3}\,;x=0$

74 $|x-2|=|x^2-4|-4$ R. $x_1=3\,;x_2=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

75 $|x-2|=|x^2-4|-\frac{9}{4}$ R. $x_1=\frac{1}{2}\,;x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}\,;x_3=-\frac{1+\sqrt{34}}{2}$

76 $|x^2-4x|=|2x^2-3|$ R. $-2\pm\sqrt{7};\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

77 $|x-1|^2-|x^2-1|=1$ R. $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

78 $|9-4x^2|=x^2+2|x-3|$ R. $x_1=1;x=-\frac{3}{5};x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{46}}{3}$

79 $(|x-1|-|3x-3|)^2=0$ R. $x=1$

80 $(|x|-2|17-x^2|)^3=8$ R. $x_1=\pm4;x_3=\frac{\pm1+\sqrt{257}}{4}$

81 $(|2x-1|-1)(6-2|x^2-9|)=0$ R. $x_1=0;x_2=1;x_{3,4}=\pm\sqrt{6};x_{5,6}=\pm2\sqrt{3}$

82 $|x-2|(1-|x-1|)=\frac{1}{4}$ R. $x_1=\frac{3}{2};x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

83 $\frac{|x-1|+3|4x+x^2+3|}{2}=2$ R. $x_1=-3;x_2=-\frac{4}{3};x_3=-\frac{2}{3}$

84 $|x-1|-|x+1|=1$ R. $x=-\frac{1}{2}$

85 $|4x^2-4|-2|x+1|=0$ R. $x_1=-1;x_2=\frac{1}{2};x_3=\frac{3}{2}$

86 $|x-4|=|(x-1)^2-1|$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2};x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

87 $(|x-1|-|3x-6|)^2=0$ R. $x_1=\frac{5}{2};x_2=\frac{7}{4}$

88 $\left|3x^2-\frac{1}{2}\right|-x=|x-1|$ R. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2};x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

89 $(x-1)|4-2x|=x^2-2$ R. $x_1=3+\sqrt{3};x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3};x_3=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

90 $(x-1)|4-2x|=x^2-1$ R. $x_1=1;x_2=5$

91 $(x-1)|4-2x|=x^2+1$ R. $x=3+\sqrt{6}$

92 $x^2|2x+2|=4|x|$ R. $x_1=-2;x_2=0;x_3=1$

93 $|x-2|-|1-x|=(x-1)^2$ R. $x_1=0;x_2=\sqrt{2}$

94 $2|x^2-9|+6|4x+12|=0$ R. $x=-3$

95 $|x-2|+|x|=1-x^2$ R. $\emptyset$

96 $|x-2|=|x^2-4|-2$ R. $0;1;\frac{1+\sqrt{17}}{2};-\frac{1+\sqrt{33}}{2}$

97 $|5x-x^2|=3+2x-|x|$ R. $1;3;2\sqrt{3}+3;4-\sqrt{19}$

98 $2|4-x^2|=|x^2-2x+3|$ R. $-1;\frac{5}{3};-1+2\sqrt{3};-1-2\sqrt{3}$

99 $|3-3x|+x=8-2|16-4x^2|$ R. $\frac{-1+\sqrt{87}}{4};\frac{1+\sqrt{43}}{4};\frac{1-3\sqrt{33}}{8};\frac{-1-\sqrt{217}}{8}$

100 $|x-1|=\frac{2}{x+1}-1$ R. $0;1;\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

101 $|x^2-x|+3x=|x-1|-|2x+1|$ R. 0; -2

102 $|x^2-5x+6|+3x+2=|x^2-1|-|x+1|$ R. 10

103 $(|x-3|+1)^2=|x^2+1|-3|x|-|-5|$ R. 8

►4. Disequazioni con valori assoluti

Le disequazioni con i moduli si risolvono in modo analogo alle equazioni con moduli.

Caso in cui l'incognita si trova anche fuori dal modulo

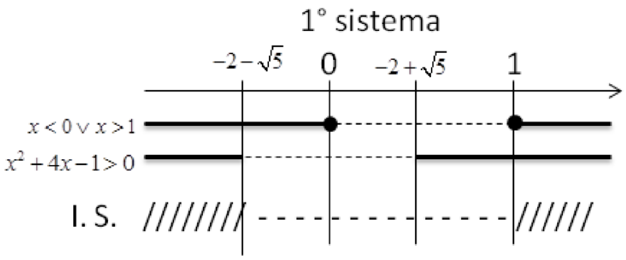
■ $|x^2 - x| < 2x^2 + 3x - 1$

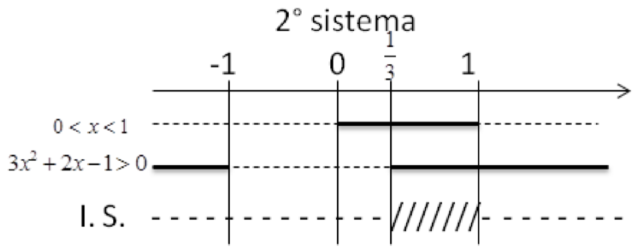
Studiamo il segno dell'argomento del modulo $x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 1$

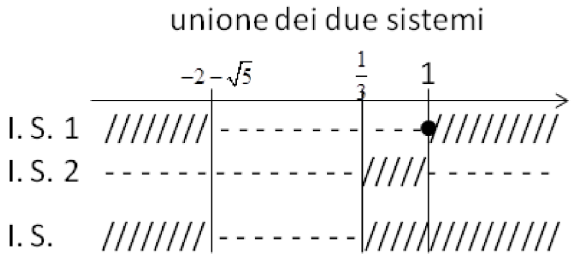
La disequazione assegnata si sdoppia nell'unione di due sistemi

$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x^2 - x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 + x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases}$ Semplificando le disequazioni si ha

$$\begin{cases} x < 0 \vee x > 1 \\ x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$$







L'insieme soluzione è $x < -2 - \sqrt{5} \vee x > \frac{1}{3}$

Caso in cui l'incognita si trova solo nel modulo

Le disequazioni della forma $|f(x)| < k$ si trasformano sempre nella disequazione $-k < f(x) < k$

■ $|x^2 - 1| < 3$

La disequazione diventa $-3 < x^2 - 1 < 3$ oppure $\begin{cases} x^2 - 1 < 3 \\ x^2 - 1 > -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 > -2 \end{cases}$.

La prima disequazione $x^2 < 4$ è verificata per $-2 < x < 2$.

La seconda è sempre verificata perché il quadrato x^2 è sempre maggiore di un numero negativo.

L'I.S. Della disequazione assegnata è quindi $-2 < x < 2$.

Le disequazioni della forma $|f(x)| > k$ si trasformano nella forma $f(x) < -k \vee f(x) > k$

■ $|x^2 - 4| > 4$

L'equazione diventa $x^2 - 4 < -4 \vee x^2 - 4 > 4$, spostando il -4 al secondo membro $x^2 < 0 \vee x^2 > 8$.

La prima disequazione $x^2 < 0$ non ha soluzioni in quanto il quadrato x^2 non può essere minore di 0.

La seconda ha per soluzioni $x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$.

Risolvi le seguenti disequazioni con valori assoluti

104 $|x+1|<1$ R. -2<x<0

105 $|x^2-3x+3|<3$ R. 0<x<3

106 $|3x^2-1|>6$ R. $x<-\frac{\sqrt{21}}{3}\vee x>\frac{\sqrt{21}}{3}$

107 $5-|5-x^2|\geq 6$ R. impossibile

108 $|9-16x^2|>0$ R. $x\neq\pm\frac{3}{4}$

109 $|x^2+6x|>2$ R. $x<-3-\sqrt{11}\vee -3-\sqrt{7}<x<-3+\sqrt{7}\vee x>-3+\sqrt{11}$

110 $|5x-x^2|>6$ R. $x<-1\vee 2<x<3\vee x>6$

111 $\left|\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right|-\frac{1}{2}>2$ R. $-\frac{12}{17}<x<\frac{12}{13}\wedge x\neq 0$

112 $|x^2-3|\geq|-4|$ R. $x\leq-\frac{\sqrt{14}}{2}\vee x\geq\frac{\sqrt{14}}{2}$

113 $2x^2-7x+3>|x^2-2x|$ R. $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{\sqrt{13}+5}{2}$

114 $\left|\frac{x}{x-1}\right|>1$ R. $x>\frac{1}{2}\wedge x\neq 1$

115 $|x^2+3|<|5-2x|$ R. $-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$

116 $|x^2-1|+3x\geq 2(x+|x^2-1|)$ R. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

117 $|x-2|+2|2-x|>(x-2)(x+2)$ R. -5<x<2

118 $(x-3)^2-|(x^2-4)|<10+(x+1)(x-1)-6x$ R. $x\neq-2\wedge x\neq 2$

119 $\frac{|x|}{x-1}<\frac{x+1}{|x|}$ R. x<1

120 $\left|\frac{3x+2}{2x}\right|\leq 1$ R. $-2\leq x\leq-\frac{2}{5}$

121 $|x-1|>|2x-1|$ R. $0<x<\frac{2}{3}$

122 $|(x^2-4)|<|(x^2-2x)|$ R. x<-1

123 $|x+1|<|x|-x$ R. $x<-\frac{1}{3}$

124 $|x-1|+3x-|3-x|+1<0$ R. x<1/3

125 $|x-1|\geq 4-|2x-3|$ R. $x\leq 0\vee x\geq\frac{8}{3}$

126 $1-|4x^2-1|+5x<|x^2-9|+3x^2$ R. $\forall x$

127 $|x^2-x|-2\leq|x-2|$ R. $-2\leq x\leq 2$

128 $\frac{|x-3|-x^2}{|x-1|}\leq 1-|x-1|$ R. $x\leq\frac{5}{4}$

129 $(x-1)^2-|x-3|<|x+5|(x-5)+2x$ R. $x>\frac{29}{5}$

130 $\begin{cases}|2x-3|<6\\|x^2-2x|>3\end{cases}$ R. $-\frac{3}{2}<x<-1\vee 3<x<\frac{9}{2}$

131 $\frac{|x^2-1|-5}{|x-1|(x^2-x-6)}\geq 0$ R. $(x\leq-\sqrt{6}\vee -2<x\leq\sqrt{6}\vee x>3)\wedge x\neq\pm 1$

►5. Equazioni irrazionali con un solo radicale

DEFINIZIONE. Un'equazione si dice irrazionale quando l'incognita compare sotto il segno di radice.

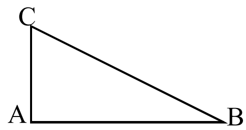
Analizziamo le seguenti equazioni: $[A]\sqrt{3}\cdot x=x^2-x+2,\quad [B]\sqrt{2x}=x^2-x$.

Notiamo che l'equazione [A] è di secondo grado, intera con un coefficiente irrazionale (sotto il segno di radice), ma non è un'equazione irrazionale perché l'incognita non compare sotto la radice.

Nell'equazione [B] il monomio 2x, contenente l'incognita, compare sotto il segno di radice pertanto essa è un'equazione irrazionale.

Problema

Determinate l'area di un triangolo rettangolo ABC retto in A avente perimetro di 24cm e i cateti che differiscono di 2cm.



Dati: $2p=24$; $\overline{AB}-\overline{AC}=2$ Obiettivo: ? Area

Strategia risolutiva: $Area=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$; dobbiamo quindi determinare i cateti.

Poniamo $\overline{AC}=x$ con $x>0 \rightarrow \overline{AB}=2+x$ e sfruttiamo l'informazione relativa al perimetro per determinare l'equazione risolvente $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=24$. Applicando il teorema di Pitagora si ha $\overline{BC}=\sqrt{x^2+(2+x)^2}=\sqrt{2x^2+4x+4}$ e dunque otteniamo l'equazione risolvente $2x+2+\sqrt{2x^2+4x+4}=24$ in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

Caso della radice di indice pari

Ricordiamo che l'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ con n pari non nullo ha significato per tutti i valori di x che rendono non negativo il radicando, pertanto l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale in cui compare uno o più radicali di indice pari sarà un sottoinsieme del Dominio o Insieme di Definizione del radicale (condizione di realtà del radicale).

Riprendendo l'equazione $\sqrt{2x}=x^2-x$ si avrà $D=I.D.=R^+\cup\{0\} \rightarrow I.S.\subseteq D$; nessun numero negativo potrà essere soluzione dell'equazione. L'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ nel suo I.D. è positiva o nulla (per definizione), pertanto l'equazione $\sqrt{2x}=x^2-x$ potrà verificarsi solo se il secondo membro sarà non negativo (condizione di concordanza del segno).

Quando abbiamo un'equazione nella quale l'incognita compare sotto una radice di indice n pari possiamo elevare alla potenza n entrambi i membri dell'equazione e la radice va via. Tuttavia, l'equazione ottenuta non sempre è equivalente a quella data, ossia non sempre ha le stesse soluzioni dell'equazione data.

Esempio

■ $\sqrt{x+2}=x$

1° metodo

Elevando al quadrato di ha $x+2=x^2$ da cui $x^2-x-2=0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo le soluzioni $x_1=-1$; $x_2=2$. Tuttavia, sostituendo questi valori di x nell'equazione irrazionale di partenza si ha:

per $x=-1 \rightarrow \sqrt{-1+2}=-1 \rightarrow \sqrt{1}=-1$ che è falsa, pertanto x=-1 non può essere soluzione;

per $x=2 \rightarrow \sqrt{2+2}=2 \rightarrow \sqrt{4}=2$ che è vera, pertanto x=2 è l'unica soluzione.

Per risolvere un'equazione irrazionale con indice pari possiamo allora elevare alla potenza pari della radice i due membri dell'equazione, risolvere l'equazione che si ottiene e verificare se le soluzioni sono accettabili.

Possiamo però procedere in un altro modo.

2° metodo

L'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ **con n pari non nullo sarà un sottoinsieme dell'insieme, chiamiamolo H, in cui sono contemporaneamente vere le condizioni** $f(x)\geq 0 \wedge g(x)\geq 0$ **ossia l'insieme H soluzione del sistema** $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ **. In simboli:** $I.S.\subseteq H$ **.**

Esempi

■ $\sqrt{x+2}=x$

La soluzione si ottiene risolvendo $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2=x^2 \end{cases}$ le disequazioni danno come condizione $x\geq 0$. Le soluzioni dell'equazione $x^2-x-2=0$ sono $x_1=-1;\ x_2=2$, l'unica da accettare è x=2.

■ $\sqrt{5-2x}=x-1$

Elevo ambo i membri al quadrato, ottengo $5-2x=x^2-2x+1 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

Sostituisco x=-2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=-2-1 \rightarrow \sqrt{9}=-3$ falso, quindi x=-2 non è una soluzione accettabile.

Sostituisco x=+2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot 2}=2-1 \rightarrow \sqrt{1}=1$ vero, quindi x=+2 è una soluzione.

Ponendo le condizioni $\begin{cases} 5-2x\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x\leq\frac{5}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \rightarrow 1\leq x\leq\frac{5}{2}$ Pertanto la soluzione x=-2 non è accettabile in quando non è compresa tra 1 e 5/2, la soluzione x=+2 è invece accettabile.

Caso dell'indice della radice dispari

L'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è definita per tutti i valori reali per cui è definito il radicando, quindi l'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ si risolve elevando ad n entrambi i membri dell'equazione: $f(x)=g^n(x)$

Esempi

■ $\sqrt[3]{x-2}=\frac{1}{2}$

Elevando al cubo si ha $x-2=\frac{1}{8} \rightarrow x=2+\frac{1}{8} \rightarrow x=\frac{17}{8}$

■ $\sqrt[3]{-3x^2+3x+1}=x$

Elevando al cubo si ha $-3x^2+3x+1=x^3 \rightarrow (x-1)^3=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

■ $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+3}}=\frac{2-5x}{4}$

Il dominio del radicando è l'insieme $H=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\neq -\frac{3}{2}\right\}$ e dunque $I.S.\subseteq H$. Per risolvere l'equazione si eleva primo e secondo membro al cubo, si ottiene l'equazione $\frac{x}{2x+3}=\left(\frac{2-5x}{4}\right)^3$, la cui risoluzione richiede la risoluzione di un'equazione di quarto grado.

■ $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\frac{4x+x^2}{3-x}$

Si ha che $I.S.\subseteq H$ dove H è $H=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0 \wedge x\neq 3\}$ in cui esistono reali entrambi i membri dell'equazione. Elevando al cubo si ottiene l'equazione risolvente che non svolgeremo.

■ $\sqrt{2x}=x^2-x$

Determiniamo l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione;

$I.S.\subseteq H$ con $H=\begin{cases} 2x\geq 0 \\ x^2-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} \mid x=0 \vee x\geq 1\}$

Rendiamo razionale l'equazione elevando ambo i membri all'esponente uguale all'indice della radice, quindi otteniamo $\left(\sqrt{2x}\right)^2=\left(x^2-x\right)^2 \rightarrow 2x=x^4-2x^3+x^2$

Risolviamo l'equazione ottenuta $x^4-2x^3+x^2-2x=0 \rightarrow x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x-2)=0 \rightarrow x=0 \vee x=2$

confrontiamo le soluzioni con H e in questo caso possiamo affermare che l'insieme soluzione dell'equazione razionale è anche l'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale assegnata $I.S.=\{0;2\}$

Risolvi le seguenti equazioni:

132 $\sqrt{2x+1}=7$ R. 24 — $\sqrt{4-x^2}=1$ R. $\pm\sqrt{3}$

133 $\sqrt[4]{2x+1}=2$ R. $\frac{15}{2}$ — $\sqrt[3]{2x+1}=-2$ R. $-\frac{9}{2}$

134 $\sqrt[3]{x+1}=-1$ R. -2 — $\sqrt[3]{x^2-6x}=3$ R.-3; 9

135 $\sqrt{5x-2}=-4$ impossibile — $\sqrt{2-x^2+x}=6$ R. impossibile

136 $\sqrt{2x^2+9}=2$ impossibile — $\sqrt[3]{16x-64}=x-4$ R. 4; 8

137 $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$ R. $\frac{4-2\sqrt{13}}{3}$ — $\sqrt[3]{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$ R. $x=-\frac{2}{3}$

138 $-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ impossibile — $x-\sqrt{x+2}=0$ R. 2

139 $\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$ R. $1;-2\pm\sqrt{3}$ — $\sqrt{25-x^2}+x=7$ R. 3; 4

140 $\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$ R. $\frac{4}{3}$ — $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$ impossibile

141 $\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$ R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $\sqrt{3x^2+10}=3x$ R. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

142 $\sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x}}-x=0$ R. +1; -1 — $\sqrt[2]{\frac{2x^2-1}{x}}-x=0$ R. $1;\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

143 $\frac{4x+1}{2x}=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ impossibile — $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$ impossibile

144 $x\sqrt{(x^2-4)}=x^2-2$ impossibile — $\sqrt[3]{2x^2-7x+5}=1-x$ R. 1; -2; 2

145 $\frac{\sqrt{2x-3}}{x-2}=2$ R. $\frac{9+\sqrt{5}}{4}$ — $\sqrt{4x-1}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ R. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$

146 $\sqrt{x+2}=x-1$ R. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ — $2\sqrt{x^2-4x-33}-x=15$ R. $21;-\frac{17}{3}$

147 $(3-x)^2-\sqrt{x-2x^2+5}=(x-3)(x-2)$ R. $1;\frac{4}{3}$

148 $4x+\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}=\frac{7}{2}(x+1)$ R. 3; 4

149 $\frac{1}{3}\sqrt{5x^2+4x-8}+x=2\left(x-\frac{1}{3}\right)$ R. 1; 3

150 $1-x+\sqrt{8x^2-21x+34}=-3+2x$ R. 6

151 $\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}=x+\frac{3}{2}$ R. $-\frac{9}{16}$

152 Basta la condizione $x\geq 0$ per determinare l'insieme H in cui si possono ricercare le soluzioni di ciascuna delle equazioni $a]\ \sqrt{x}=\frac{1}{x+1}$ e $b]\ \sqrt[4]{x}=\frac{1}{4-x^2}$?

153 Verificate che per l'equazione $3+\sqrt{7-3x}-x=0$ l'insieme H è vuoto.

154 Perché l'equazione $\sqrt{x^2-1}=-3$ è impossibile?

►6. Equazioni con due o più radicali

Non potendo stabilire una forma canonica, procederemo mediante esempi al fine di acquisire un metodo risolutivo a seconda dei casi che si possono presentare.

■ $\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{x}$

Osserviamo subito che i due membri, nell'insieme in cui entrambi hanno significato, sono positivi.

Determiniamo quindi l'insieme H di definizione per entrambi: $H=\begin{cases}2-\frac{1}{x}\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$.

Risolvendo le due disequazioni otteniamo $\begin{cases}x<0\vee x\geq\frac{1}{2}\\ x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq\frac{1}{2}\right\}$.

Ora eleviamo al quadrato entrambi i membri ottenendo l'equazione razionale fratta

$2-\frac{1}{x}=x$ da cui $x_1=x_2=1$ poiché tale valore appartiene all'insieme H si ha $I.S.=\{1\}$.

■ $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+6x}=0$

Separiamo i due radicali $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{2x^2+6x}$.

Affinché i due membri dell'equazione siano positivi dobbiamo porre la condizione di positività anche al radicando del radicale cubico: $H=\begin{cases}x+3\geq 0\\ 2x^2+6x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\{x\in\mathbb{R}\,|x=-3\vee x\geq 0\}$.

Per trasformare l'equazione data in un'equazione razionale, scriviamo radici con lo stesso indice. Il minimo comune indice è 6, perciò si ha $\sqrt[6]{(x+3)^3}=\sqrt[6]{(2x^2+6x)^2}$

Elevando alla sesta potenza si ha $(x+3)^3=(2x^2+6x)^2\rightarrow(x+3)^3-(2x^2+6x)^2=0$

Raccogliendo a fattore comune otteniamo $(x+3)^2\cdot(-4x^2+x+3)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto $(x+3)^2=0\rightarrow x+3=0\rightarrow x=-3$; $-4x^2+x+3=0\rightarrow x_1=-\frac{3}{4}\vee x_2=1$

Confrontiamo ora le soluzioni con le condizione poste in H: $I.S.=\{-3\,;1\}$.

■ $\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2x-1}=0$

Separiamo i due radicali $\sqrt{x}=-\sqrt{x^3+2x-1}$; osserviamo che i due membri nell'insieme in cui sono definiti sono di segno opposto e dunque l'uguaglianza sarà vera solo nel caso in cui entrambi si annullino.
Il primo membro si annulla solo per $x=0$ che non annulla il secondo membro, pertanto l'equazione è impossibile.

■ $-\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x+2}=0$

Portiamo la radice con il segno meno a secondo membro, in modo da avere due radici positive
$\sqrt{2x+2}=\sqrt{x^2+3x}$

Poniamo le condizione sull'accettabilità della soluzione

$\begin{cases}2x+2\geq 0\\ x^2+3x\geq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\leq -3\vee x\geq 0\end{cases}\rightarrow x\geq -1$

Eleviamo ora al quadrato i due membri dell'equazione $2x+2=x^2+3x\rightarrow x^2+x-2=0$ le soluzioni sono $x_1=-2;\ x_2=1$.

Di queste due soluzioni solo x=1 soddisfa le condizioni di accettabilità.

■ $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$

In questo esempio ci sono altri termini oltre i due radicali. Spostiamo dopo l'uguale il radicale negativo in modo che sia a destra sia a sinistra i termini siano positivi: $\sqrt{x+7}=\sqrt{x-1}+2$

C.E. $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq 1 \end{cases} \rightarrow x\geq 1$

Torniamo all'equazione, eleviamo al quadrato $x+7=4+4\sqrt{x-1}+x-1 \rightarrow 4\sqrt{x-1}=4 \rightarrow \sqrt{x-1}=1$

Eleviamo nuovamente al quadrato $x-1=1 \rightarrow x=2$.

Poiché 2>1 la soluzione è accettabile.

■ $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$

Portiamo -1 al secondo membro in modo da avere tutti termini positivi: $\sqrt{x+12}=\sqrt{1-x}+1$

C.E. $\begin{cases} x+12\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -12 \\ x\leq 1 \end{cases} \rightarrow -12\leq x\leq 1$

Torniamo all'equazione ed eleviamo al quadrato ambo i membri $x+12=1-x+2\sqrt{1-x}+1$ semplificando $x+5=\sqrt{1-x}$. Scriviamo le condizioni per quest'altra equazione irrazionale

$\begin{cases} x+5\geq 0 \\ -12\leq x\leq 1 \end{cases} \rightarrow -5\leq x\leq 1$

Eleviamo al quadrato l'ultima equazione ottenuta $x^2+10x+25=1-x \rightarrow x^2+11x+24=0$

Le soluzioni sono x=-8 non accettabile, x=-3 accettabile.

■ $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$

Trasporto a destra il radicale che ha il segno meno, in modo che diventi positivo $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-4x}+x$

In questo caso risulta problematico risolvere il sistema con tutte le condizioni di accettabilità, perché bisognerebbe risolvere anche la disequazione irrazionale $\sqrt{1-4x}+x\geq 0$. Ci limiteremo allora a risolvere l'equazione e poi verificarne le soluzioni.

Elevo al quadrato ambo i membri $x^2+1=1-4x+x^2+2x\sqrt{1-4x}$

Semplificando si ha $4x=2x\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x=x\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x-x\sqrt{1-4x}=0 \rightarrow x(2-\sqrt{1-4x})=0$

Una soluzione è x=0, la seconda soluzione si ottiene da $2-\sqrt{1-4x}=0 \rightarrow 2=\sqrt{1-4x}$ elevando al quadrato si ha $4=1-4x \rightarrow x=-\frac{3}{4}$.

Verifichiamo ora le soluzioni. Per x=0 si ha $\sqrt{0^2+1}-\sqrt{1-4\cdot 0}=0 \rightarrow 1-1=0$ soluzione accettabile.

Per $x=-\frac{3}{4}$ si ha $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}^2\right)+1}-\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{4}$ da cui $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ soluzione accettabile.

■ $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$

Separiamo i due radicali, portiamo quello con il segno negativo a secondo membro $\sqrt{x+7}=2+\sqrt{x-1}$.

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali $H=\begin{cases} x+7\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}$.

Analizziamo il secondo membro che dovrà essere positivo per permettere di costruire l'equazione razionale da risolvere $2+\sqrt{x-1}\geq 0$ che in H è certamente positivo essendo somma di termini positivi.

Eleviamo ambo i membri al quadrato $(\sqrt{x+7})^2=(2+\sqrt{x-1})^2$ facendo attenzione al secondo membro che si presenta come quadrato di binomio $x+7=4+4\cdot\sqrt{x-1}+(x-1) \rightarrow 4\cdot\sqrt{x-1}=4$.

Ci troviamo di fronte a un'altra equazione irrazionale, ma per le condizioni poste possiamo elevare al quadrato ambo i membri $x-1=1 \rightarrow x=2$.

Infine confrontiamo con l'insieme H, possiamo concludere $I.S.=\{2\}$.

■ $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali, $H=\begin{cases} x+12\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} | -12\leq x\leq 1\}$

I due radicali sono già separati; ci conviene portare -1 al secondo membro per avere tutti termini positivi: $\sqrt{x+12}=1+\sqrt{1-x}$. Elevando al quadrato primo e secondo membro si ottiene $\sqrt{x-1}=5+x$.

Poniamo la condizione di positività sul secondo membro e otteniamo l'insieme $H_1=\begin{cases} 5+x\geq 0 \\ -12\leq x\leq 1 \end{cases}$, in sintesi $H_1=\{x\in\mathbb{R} | -5\leq x\leq 1\}$. Eleviamo al quadrato di nuovo e otteniamo $x^2+11x+24=0$ le cui soluzioni sono $x_1=-8 \vee x_2=-3$; confrontando con H_1 possiamo concludere che $I.S.=\{-3\}$.

■ $\sqrt{2x-5}=3-\sqrt{x+1}$

Poniamo le condizione di realtà dei radicali: $H=\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\geq \frac{5}{2}\right\}$

Prima di procedere con l'elevamento a potenza, dobbiamo porre la condizione di concordanza del segno. Conviene trasportare al primo membro il radicale di destra. Nell'equazione trovata $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}=3$ possiamo eleviamo al quadrato $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}\right)^2=3^2 \rightarrow (2x-5)+(x+1)+2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=9$ da cui $2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=13-13x$ contenente un solo radicando. Nell'insieme H è garantita la realtà del radicale, ma dobbiamo imporre che il secondo membro sia non negativo; otteniamo $H_1=\begin{cases} x\geq \frac{5}{2} \\ 13-3x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H_1=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| \frac{5}{2}\leq x\leq \frac{13}{2}\right\}$ in cui cerchiamo le soluzioni dell'equazione assegnata.

Elevando al quadrato si ha l'equazione razionale $x^2-66x+189=0 \rightarrow x_1=3 \vee x_2=63$ e confrontando con H_1 si conclude $I.S.=\{3\}$.

■ $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$

Determiniamo l'insieme H ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà:

$H=\begin{cases} 1-4x\geq 0 \\ x^2+1\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\leq \frac{1}{4}\right\}$

Trasportiamo al secondo membro il radicale preceduto dal segno negativo: $\sqrt{x^2+1}=x+\sqrt{1-4x}$.

Prima di elevare al quadrato dovremmo porre le condizioni per la concordanza del segno e quindi risolvere $x+\sqrt{1-4x}\geq 0$ che è una disequazione irrazionale. Usiamo allora il metodo della verifica finale: si risolve l'equazione elevando al quadrato e giunti alle soluzioni si vanno a sostituire, una alla volta, nell'equazione iniziale individuando quale dei risultati rende vera l'uguaglianza.

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(x+\sqrt{1-4x}\right)^2 \rightarrow x^2+1=x^2+(1-4x)+2x\cdot\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x\cdot\sqrt{1-4x}=4x$ ·

Quest'ultima equazione presenta un solo radicale reale in H e ha i due membri concordi. Possiamo procedere elevando al quadrato oppure raccogliendo $2x$ a fattore comune e poi applicare la legge di annullamento del prodotto: $2x\sqrt{1-4x}-2=0 \rightarrow x=0 \vee \sqrt{1-4x}=2$ e da questa si ottiene $x=-\frac{3}{4}$.

Verifica:

Sostituiamo $x=0$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $1-1=0$ vero.

Sostituiamo $x=-\frac{3}{4}$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $\frac{5}{4}-2=-\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$ vero.

Conclusione: $I.S.=\left\{0;-\frac{3}{4}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni con due radicali

155 $\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-x}$ R. impossibile

156 $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-3}$ R. impossibile

157 $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{3-x}$ R. $x=2\,;x=3$

158 $\sqrt{6-3x}=2+\sqrt{x+1}$ R. $x=\frac{3-2\sqrt{6}}{4}$

159 $\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2-x-1}$ R. $x=-1-\sqrt{6}$

160 $\sqrt{3-2x}=-\sqrt{x^2+3}$ R. $\emptyset$

161 $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}-1$ R. $x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

162 $2\sqrt{x-1}=\sqrt{1+2x}+1$ R. $x=4+2\sqrt{2}$

163 $3\sqrt{x-x^2}=2\sqrt{x-1}$ R. $x=1$

164 $\sqrt{x+1}=3\sqrt{4-x}$ R. $x=\frac{7}{2}$

165 $\sqrt{x^2-x-3}=2\sqrt{x+5}$ R. $x_1=\frac{5+3\sqrt{13}}{2}\,;x_2=\frac{5-3\sqrt{13}}{2}$

166 $1+2\sqrt{1-\frac{2}{3}x}=\sqrt{2x+1}$ R. $x=\frac{60}{49}$

167 $4-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}+3$ R. $x=2$

168 $2-2\sqrt{2-x}=4\sqrt{1-x}$ R. $x=1$

169 $\sqrt{x^3-2x^2}=3\sqrt{x^2-2x}$ R. $x_1=0\,;x_2=2\,;x_3=9$

170 $3\sqrt{x^4-x^3}=4\sqrt{x^4+2x^3}$ R. $x_1=0\,;x_2=-\frac{41}{7}$

171 $\sqrt{2x^2-4x-3}=\sqrt{x^2-1}$ R. $x=2+\sqrt{6}$

172 $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{4-x^2}$ R. $\emptyset$

173 $\sqrt{x^2-2\mathrm{x}+3}=\sqrt{1-x^2+2\mathrm{x}}$ R. $x=1$

174 $\sqrt{4x-7}+\sqrt{7x-4x^2}=0$ R. $\frac{7}{4}$

175 $\sqrt{x^2+6x+9}+2\cdot\sqrt{1-x}=0$ R. impossibile

176 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}+4=0$ R. impossibile

177 $\sqrt{x^2-4}=3+2\sqrt{1-x^2}$ R. $\emptyset$

178 $\sqrt{4+x^2}=1+\sqrt{x^2-1}$ R. $x_1=\sqrt{5}\,;x_2=-\sqrt{5}$

179 $\sqrt{2x+1}=3+2\sqrt{x-6}$ R. $x=26-6\sqrt{11}$

180 $\sqrt{x-2}-\sqrt{2\mathrm{x}-1}=\sqrt{5\mathrm{x}-1}$ R. $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

181 $\sqrt{\frac{(3-2\mathrm{x})}{(x-1)}}+\sqrt{2\mathrm{x}-1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ R. $\frac{3}{2}$

182 $\sqrt{(x-1)^2+\sqrt{5\mathrm{x}-6}}=2-x$ R. $\frac{5}{4}$

183 $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}$ R. 1

184 $\sqrt{\frac{x}{4-x}}+3\sqrt{\frac{4-x}{x}}-4=0$ R. $2\,;\frac{18}{5}$

185 $\frac{5}{6-\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\frac{6}{5-\sqrt{x}}$ R. 1; 64

►7. Disequazioni irrazionali

Concludiamo con un cenno alle disequazioni irrazionali, disequazioni nelle quali l'incognita compare sotto radice. Esaminiamo il caso in cui l'incognita è sotto radice quadrata e l'equazione presenta una sola radice. Qualunque sia la disequazione di partenza, ci si può sempre ricondurre ai seguenti due casi.

1° caso $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di una coppia di sistemi di disequazioni. Infatti distinguiamo due casi a seconda del segno della g(x).

Se g(x)<0 la disequazione è sicuramente verificata, in quanto al primo membro c'è una quantità sicuramente positiva in quanto radice quadrata; bisogna però corre la condizione di esistenza del radicando $f(x) \geq 0$.

Pertanto, il primo sistema è $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$.

Se $g(x) \geq 0$, dopo aver posto la condizione di esistenza del radicale $f(x) \geq 0$ si possono elevare al quadrato i due membri dell'equazione, in quanto entrambi positivi. Si ottiene il sistema $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$ del quale si può eliminare la seconda disequazione in quanto la prima e la seconda disequazione implicano automaticamente che $f(x) > 0$. In definitiva

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

■ $\sqrt{25 - x^2} > x - 5$

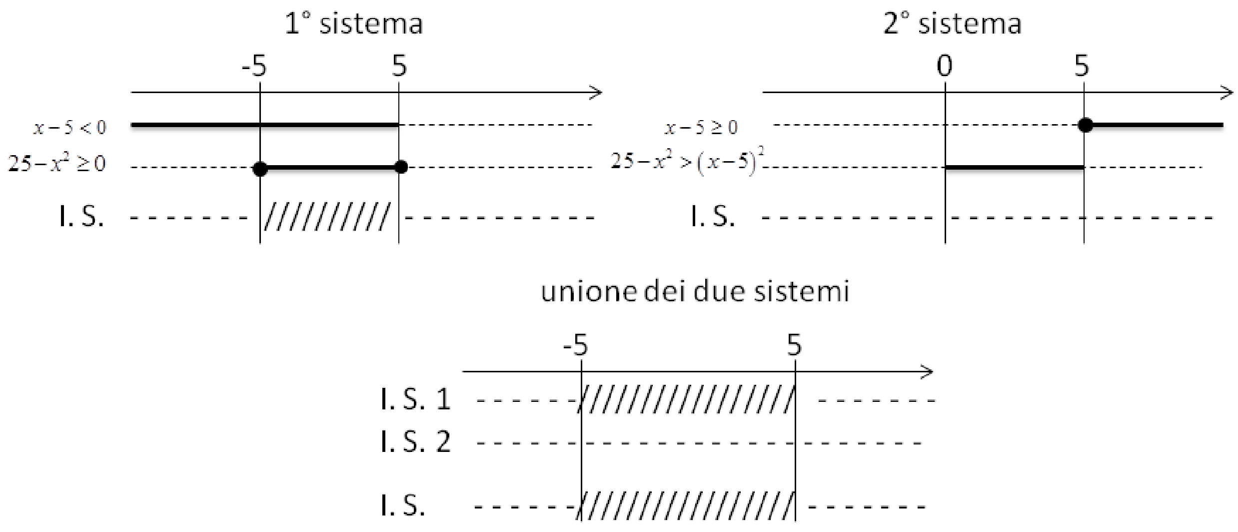
La disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} x-5 < 0 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 25 - x^2 > (x-5)^2 \end{cases}$

Il primo sistema $\begin{cases} x - 5 < 0 \;\rightarrow\; x < 5 \\ 25 - x^2 \geq 0 \;\rightarrow\; x^2 \leq 25 \;\rightarrow\; -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$ verificato per $-5 \leq x \leq 5$

Il secondo sistema

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 5 \\ 25 - x^2 > (x-5)^2 \;\rightarrow\; 25 - x^2 > x^2 - 10\text{x} + 25 \;\rightarrow\; 2\text{x}^2 - 10\text{x} < 0 \;\rightarrow\; 2\text{x}(x-5) < 0 \;\rightarrow\; 0 < x < 5 \end{cases}$$

mai verificato: $I.S. = \emptyset$.



L'Insieme Soluzione della disequazione è 0<x<5.

2° caso $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di un solo sistema di disequazioni, in quanto la condizione $g(x) \le 0$ non dà soluzioni, in quanto la radice del primo membro dovrebbe essere minore di un numero negativo, cosa non possibile in quanto le radici danno sempre valori positivi. Rimane allora da esaminare la condizione g(x)>0; in questo caso si può elevare al quadrato primo e secondo membro ma resta sempre da aggiungere la condizione di esistenza del radicale, cioè $f(x) \ge 0$. In definitiva

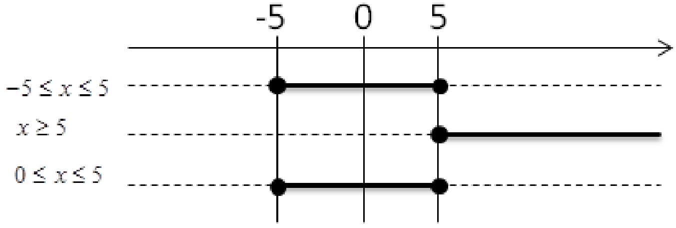
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

■ $\sqrt{25-x^2} \le x-5$

La disequazione presenta il segno di minore, pertanto è equivalente a un sistema di tre disequazioni:

$$\sqrt{25-x^2} \le x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2 \ge 0 \\ x-5 \ge 0 \\ 25-x^2 \le (x-5)^2 \end{cases}$$ Sviluppando il sistema di ha

$$\begin{cases} 25-x^2 \ge 0 \rightarrow x^2 \le 25 \rightarrow -5 \le x \le 5 \\ x-5 \ge 0 \rightarrow x \ge 5 \\ 25-x^2 \le (x-5)^2 \rightarrow 25-x^2 \le x^2-10x+25 \rightarrow 2x^2-10x \le 0 \rightarrow 2x(x-5) \le 0 \rightarrow 0 \le x \le 5 \end{cases}$$



La disequazione è verificata solo per x=5.

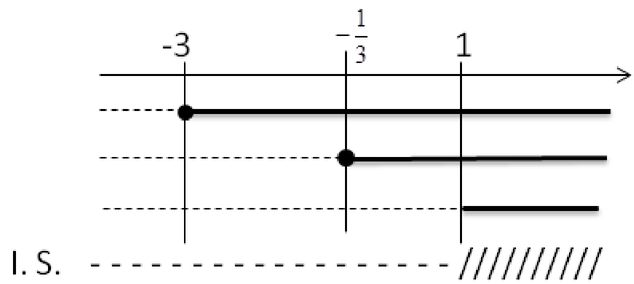
■ $\sqrt{x+3} < \sqrt{3x+1}$

La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \text{ condizione di esistenza del primo radicale} \\ 3x+1 \ge 0 \text{ condizione di esistenza del secondo radicale} \\ x+3 < 3x+1 \text{ i due membri della disequazione sono positivi, si può elevare al quadrato} \end{cases}$$

Eseguendo i vari passaggi si ha

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \rightarrow x \ge -3 \\ 3x+1 \ge 0 \rightarrow x \ge -\frac{1}{3} \\ x+3 < 3x+1 \rightarrow -2x < -2 \rightarrow x > 1 \end{cases}$$



La disequazione è verificata per x>1

Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali

186 $\sqrt{4x^2-x}\geq -2x+1$ R. $x\geq\frac{1}{3}$

187 $\sqrt{x^2-x-2}\leq 2x+6$ R. $-2\leq x\leq -1\vee x\geq 2$

188 $\sqrt{2x-1}\geq x-8$ R. $\frac{1}{2}\leq x\leq 13$

189 $\sqrt{x^2-3x+2}<7-5x$ R. $x\leq 1$

190 $\sqrt{9x^2+2x}\geq 3x-4$ R. $x\leq -\frac{2}{9}\vee x\geq 0$

191 $\sqrt{x^2-2x}\geq 5-x$ R. $x\geq\frac{25}{8}$

192 $\sqrt{16-2x^2}<x+4$ R. $-2\sqrt{2}\leq x<-\frac{8}{3}\vee 0<x\leq 2\sqrt{2}$

193 $\sqrt{3-2x}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. impossibile

194 $\sqrt{4x^2+2x}\geq 2x-3$ R. $x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 0$

195 $\sqrt{1-x^2}>2x-1$ R. $-1\leq x<\frac{4}{5}$

196 $\sqrt{2x^2-x-1}>\sqrt{x-3}$ R. $x\geq 3$

197 $\sqrt{x^2+2x+1}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. $-1\leq x\leq 0$

198 $\sqrt{16x^2+2x}\geq -4x-1$ R. $x\leq -\frac{1}{8}\vee x\geq 0$

199 $\sqrt{x^2-1}<x+3$ R. $-\frac{5}{3}<x\leq -1\vee x\geq 1$

200 $\sqrt{x^2-3x+2}\leq\sqrt{3x^2-2x-1}$ R. $x\leq -\frac{3}{2}\vee x=1\vee x\geq 2$

201 $\sqrt{9x^2-x}\geq -3x+6$ R. $x\geq\frac{36}{35}$

202 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{x+\sqrt{3}}{2}$ R. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

203 $\sqrt{x^2-5x}\geq x-4$ R. $x\leq 0\vee x\geq\frac{16}{3}$

204 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{1}{2}x+1$ R. $0\leq x\leq\frac{4}{3}$

205 $\sqrt{10x-x^2}>\sqrt{2x^2-32}$ R. $4\leq x<\frac{16}{3}$

206 $\sqrt{x^2+x}\geq x+3$ R. $x\leq -\frac{9}{5}$

207 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{1}{2}x-1$ R. impossibile

208 $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. x=0

209 $\sqrt{2x^2+x}\geq\sqrt{4-x^2}$ R. $-2\leq x\leq -\frac{4}{3}\vee 1\leq x\leq 2$

210 $3\sqrt{3x+x^2}<2\sqrt{2x-x^3}$ R. $x\leq -3$

211 $2\sqrt{x+x^3}>\sqrt{2x^3-3x^2}$ R. $x\geq\frac{3}{2}$

212 $\sqrt{x^5-x^3}<2\sqrt{x^4+2x^3}$ R. $1\leq x<2+\sqrt{13}$

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2
7. LA PROBABILITA'



Dice foto di Matsuyuki
http://www.flickr.com/photos/matsuyuki/201651074/

Indice

►1. Gli eventi

L'esito del lancio di una moneta o di un dado, l'esito di un'estrazione del lotto, il sesso di un nascituro, la durata di una lampadina o di un computer sono esempi di fenomeni la cui realizzazione non può essere prevista con certezza; per questo vengono detti eventi casuali o aleatori (dal latino alea, dado). Spesso è necessario prendere decisioni in condizioni di incertezza: in quale università proseguire gli studi, decidere se fare il vaccino contro l'influenza, scommettere sulla vincita di una squadra, sull'uscita di una sequenza di numeri al gioco del Lotto. E' quindi fondamentale nei confronti di un fenomeno dall'esito incerto, poter identificare quali sono gli eventi che si possono verificare ed inoltre riuscire ad esprimere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di tali eventi.
Quali sono gli eventi possibili per un dato fenomeno aleatorio? Supponiamo di lanciare un dado e di essere interessati alla faccia che si presenta dopo aver effettuato il lancio. Il lancio del dado rappresenta il **fenomeno** oggetto del nostro studio, l'uscita del numero 4 o l'uscita di un numero dispari sono detti **eventi aleatori o casuali**, in quanto sappiamo che si presenterà una delle facce, ma non sappiamo quale.

DEFINIZIONE: Si chiama **evento casuale** o **aleatorio** un risultato o un fatto qualunque di cui si possa dire se l'evento si è verificato o meno.

Se si considera la proposizione "Oggi farà bel tempo" è evidente che non è chiaro cosa si intende per bel tempo (senza pioggia? senza nuvole? con il sole?) né il luogo a cui ci si riferisce. Sarebbe meglio affermare per esempio "Stamani a Milano ci sarà il sole". È necessario quindi specificare con precisione l'evento che si considera in modo da essere sicuri se l'evento si è verificato o meno.
Nel lancio di un dado sono possibili sei risultati, espressi dai numeri da 1 a 6 e solo uno di essi si realizzerà. Chiamiamo questi sei risultati **eventi elementari** e indichiamo il loro insieme con Ω.

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

DEFINIZIONE. Si chiama **spazio degli eventi**, l'insieme di tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato. Tale insieme viene indicato con Ω .

L'insieme Ω non esaurisce la totalità degli eventi collegati al lancio del dado; non comprende per esempio l'evento P = {Numero pari} o l'evento M = {Numero minore di 3}. Tuttavia Ω permette di rappresentare qualsiasi evento come particolare sottoinsieme di Ω.

DEFINIZIONE. Si chiama **evento elementare** ogni elemento dell'insieme Ω, mentre **evento composto** un sottoinsieme qualsiasi di Ω.

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte e consideriamo i seguenti eventi: uscita di un asso di cuori, uscita di un re. Qual è la differenza fra questi due eventi? Il primo dei due è un *evento elementare*, mentre l'altro è un evento formato da quattro eventi elementari (tutti i possibili re presenti nel mazzo) e viene detto *evento composto*.
Sono esempi di eventi composti l'uscita di un numero dispari nel lancio di un dado o l'estrazione di due palline rosse da un'urna contenente 3 palline rosse e 7 nere.
Consideriamo ora due eventi che rivestono una particolare importanza: l'uscita del 7 nel lancio di un dado e l'uscita di un numero minore di 7 sempre nel lancio di un dado. È evidente che l'uscita del 7 non si verificherà mai, mentre l'uscita di un numero minore di 7 è sempre verificato.

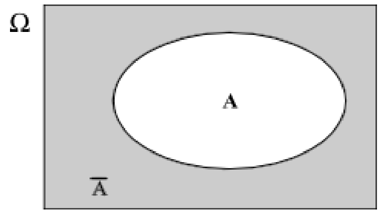
DEFINIZIONI

Chiamiamo **evento impossibile**, e lo indicheremo Ø, un evento che non può verificarsi in alcun caso.

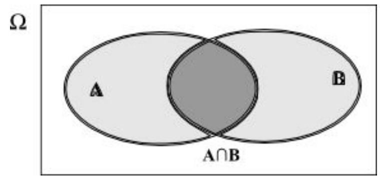
Chiamiamo **evento certo** l'insieme Ω costituito da tutti gli eventi elementari e quindi da tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato.

Gli eventi elementari di un insieme A e gli eventi composti che si possono ottenere con gli eventi elementari di A formano lo spazio degli eventi che viene indicato con $\wp(A)$ o insieme delle parti di A
Gli eventi sono gli oggetti dello studio della probabilità e si indicano con le lettere maiuscole A, B, … mentre per le operazioni e le relazioni tra eventi si usano i corrispondenti simboli che si sono utilizzati per le operazioni e le relazioni tra insiemi. Molto utile è anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn.

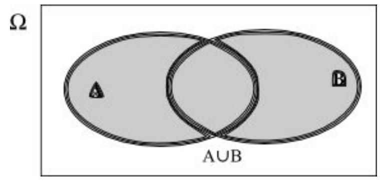
1. La **negazione** di un evento A indicata con $\overline{A}$ indica che $\overline{A}$ non si verifica quando A si verifica e viceversa.



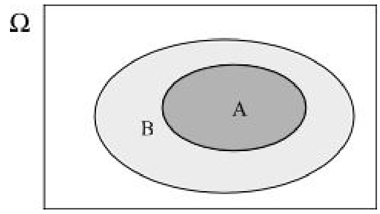
2. L'**intersezione** tra gli eventi A e B sarà indicata con $C=A\cap B$ e sarà verificata se gli eventi A e B si verificheranno insieme.



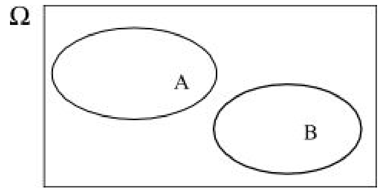
3. L'**unione** tra gli eventi A e B si indicherà con $C=A\cup B$ e sarà verificata se almeno uno dei due eventi sarà verificato.



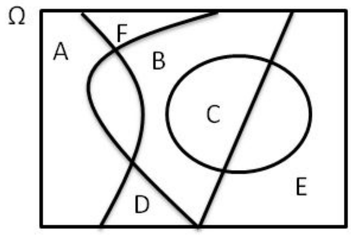
4. L'evento A **implica** l'evento B si indicherà con $A\subseteq B$, significa che ogni volta che si verifica A si verifica anche B.



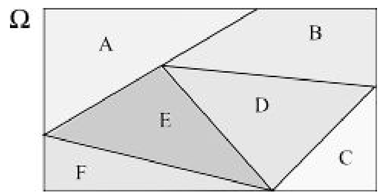
5. Due eventi A e B si dicono **incompatibili**, se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.



6. Due o più eventi si dicono **esaustivi** se è necessario che almeno uno di essi si verifichi. Nell'esempio l'insieme Ω è completamente coperto dall'unione di A, B, C, D, E, F.



7. Un insieme di eventi che goda delle proprietà 5 e 6, con eventi che sono incompatibili ed esaustivi, genera una partizione nello spazio degli eventi possibili. L'unione è identificabile con l'evento certo Ω . Gli eventi che costituiscono la partizione di Ω sono detti **eventi elementari** o **costituenti**.



DEFINIZIONE. Se n eventi A, B, …, F, sono esaustivi (A∪ B∪ … F = Ω) e a due a due incompatibili (A∩B = A∩C … = B∩C … =C∩D … = D∩E … =E∩F = Ø) diremo che essi formano una **partizione dello spazio degli eventi**. Tutti gli eventi, identificabili da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, sono dati dall'**insieme delle parti** di Ω indicato con $\wp(\Omega)$.

Ricordiamo che la cardinalità dell'insieme delle parti cioè il numero degli eventi che si possono formare con gli elementi di Ω è dato da $card(\wp(\Omega))=2^n$, dove n rappresenta il numero degli eventi elementari. Così nel lancio del dado abbiamo $2^6=64$ possibili eventi. Naturalmente sono considerati anche l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento impossibile e l'insieme $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ che rappresenta l'evento certo.

1 Quali dei seguenti eventi sono certi, probabili, impossibili

a) Il giorno di Pasquetta pioverà	C P I
b) Il giorno di Pasqua sarà domenica	C P I
b) Comprando un biglietto della lotteria vincerò il primo premio;	C P I
c) Quest'anno sarò promosso;	C P I
d) Il 30 febbraio sarà domenica.	C P I

2 Aprendo a caso un libro di 200 pagine indica se gli eventi seguenti sono impossibili, certi o casuali e in questo ultimo caso indica se sono elementari.

Si prenda la pagina 156 ……..........................

Si prenda la pagina 210 ……..........................

Si prenda una pagina minore o uguale a 200 ……..........................

Si prenda una pagina multipla di 10 ……..........................

3 Completa la tabella

Lanciando una moneta ottengo croce		
Insiemi che identificano l'evento	Spazio degli eventi	Numero degli eventi
$E=\{croce\}$	$\Omega=\{testa, croce\}$	$2^2=4$
Lanciando un dato ottengo 1 o 6		
$E=\{1,6\}$	$\Omega=\{1,2,\dots,\dots,\dots,\dots\}$	$2^6=\dots$
Estraendo una pallina da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero primo		
$E=\{2,3,5,\dots,\dots,\dots\}$	$\Omega=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 15\}$	2^{15}
Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta il 7 di denari		
$E=\{7\ denari\}$	$\Omega=\{x\in A\mid A=\{Mazzo\ da\ 40\ carte\}\}$	… ...

Lanciando due monete ottengo facce diverse		
Insiemi che identificano l'evento	Spazio degli eventi	Numero degli eventi
…………..…	………….…	………
Lanciando un dato ottengo un numero pari		
…………..…	………….…	………
Estraendo una pallina da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero multiplo di 3		
…………..…	………….…	………
Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta un asso		
…………..…	………….…	………

4 Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane, individua fra le seguenti le coppie di eventi incompatibili:

a) La carta estratta è un re.
b) La carta estratta è di spade.
c) La carta estratta è un 5.
d) La carta estratta è una figura.
e) La carta estratta è di denari.
f) La carta estratta è un multiplo di 3.
g) La carta estratta non è una figura.

Quali sono i 2 eventi la cui unione genera un evento certo?

5 Considerando la distribuzione dei sessi in famiglie con due figli in cui lo spazio degli eventi $\Omega=\{MM, MF, FM, FF\}$ quali sono l'intersezione e l'unione degli eventi E_1 ="Il primo figlio è maschio" e E_2 = "Il secondo figlio è maschio".

►2. Definizioni di probabilità

Nel linguaggio comune l'uso del termine probabilità è abbastanza chiaro e uniforme. Si dice che un certo "fatto" o "evento" è più o meno probabile a seconda che ci si aspetti che si verifichi più o meno facilmente. La probabilità è dunque una misura delle aspettative nel verificarsi di un evento. Il valore della probabilità è la misura (un numero) che esprime l'opinione del soggetto (decisore) in merito al verificarsi di un ben determinato evento A, ovvero esprime il suo grado di fiducia nel verificarsi dell'evento che dipende dalle informazioni che si hanno a disposizione al momento di effettuare la valutazione.

Se diciamo che oggi pioverà con probabilità $0{,}20=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ intendiamo che siamo disposti a scommettere 20 centesimi per avere 1 euro nel caso che piova e perdere i 20 centesimi della posta nel caso che non piova.

DEFINIZIONE. La probabilità dell'evento A è quel valore P(A) che si ottiene dalla quota q che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita S nel caso si verifichi l'evento. Quindi $P(A)=\frac{q}{S}$.

Per ottenere una valutazione coerente, per valutare quanto siamo disposti a perdere/vincere nella scommessa, dobbiamo immedesimarci nei due ruoli, quello dello scommettitore e quello del banco. Inoltre le somme che scommettiamo devono essere significative per chi procede alla valutazione.
Nessun individuo coerente scommetterebbe su un evento impossibile una quota maggiore di 0 qualunque sia la vincita e nessun individuo pagherebbe una vincita per il verificarsi di un evento certo.
Da queste considerazioni deduciamo che la misura della probabilità appartiene all'intervallo [0,1], essendo 0 il valore che corrisponde all'evento impossibile e 1 quello che corrisponde all'evento certo.

Regole per la probabilità

Prima di entrare nella valutazione della probabilità sintetizziamo le regole che abbiamo appena introdotto.
La probabilità è un numero reale non negativo p associato ad ogni evento E, $p=P(E)$, tale che:
1. se l'evento E è certo $P(E)=1$, se l'evento E è impossibile $P(E)=0$;
2. se gli eventi A e B sono incompatibili $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;
3. se l'evento E è un evento aleatorio e $\overline{E}$ l'evento complementare, dato che i due eventi E e $\overline{E}$ sono incompatibili ed esaustivi, dalle due regole precedenti deriva: $P(E)+P(\overline{E})=1$ e $P(\overline{E})=1-P(E)$.
Abbiamo dato le regole della probabilità, ma come si procede alla sua valutazione?

Definizione classica

La valutazione della probabilità a volte si riconduce a semplici giudizi di equiprobabilità: cioè ogni evento elementare dello spazio degli eventi ha la stessa probabilità. Così nel lancio di un dado, nel gioco della tombola, nel gioco delle carte tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità. Quindi se n sono gli eventi elementari la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$.
La probabilità di un evento E è data dal rapporto tra il numero f dei casi favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti i casi possibili, purché ugualmente possibili. In simboli:

$$P(E)=\frac{f}{n}$$

Mentre nei giochi di sorte si realizzano le condizioni per calcolare tale probabilità (conoscenza a priori dei casi possibili, di quelli favorevoli e condizione di equiprobabilità) esistono altri eventi casuali per i quali è difficile o impossibile calcolare tale probabilità.

Esempi

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando un dado regolare esca*
  A. un numero dispari, *B. il numero 1,* *C. il numero 6,* *D. un multiplo di 3.*

Dato che l'uscita di ogni faccia del dado si presuppone abbia la stessa probabilità possiamo applicare lo schema classico.
Lo spazio degli eventi elementari contiene 6 elementi $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, cioè $n=6$ sono i casi possibili; l'evento A "esca un numero dispari" è $A=\{1,3,5\}$ che contiene 3 elementi, $f=3$, i casi favorevoli sono 3. Dunque si ha: $P(A)=\frac{f}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%$.

$P(B)=\frac{1}{6}$ c'è un solo caso favorevole (il numero 1) e 6 casi possibili (le 6 facce del dado).

$P(C)=\frac{1}{6}$ come per il caso precedente c'è un solo caso favorevole su 6 possibili.

$P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ i casi favorevoli sono 2 (i multipli di 3 sono il 3 e il 6), i casi possibili sempre 6.

- *Se in un sacchetto ho 3 palline rosse e 2 palline gialle qual è la probabilità che estraendo a caso una pallina questa sia rossa?*

La probabilità che si estragga una pallina rossa è $p=\frac{3}{5}=0{,}6=60\%$, infatti i casi favorevoli al verificarsi dell'evento “estrarre una pallina rossa” sono 3, tante quante sono le palline rosse, i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 5, tante quante palline ci sono nel sacchetto.

- *Da un mazzo di 40 carte napoletane estraiamo una carta. Calcoliamo la probabilità degli eventi:*
  A) esce una carta di spade;
  B) esce una carta con il numero 12;
  C) esce una carta con un numero o una figura;
  D) esce il sette di denari;
  E) esce un asso.

I casi possibili sono 40, dato che il mazzo è formato da 40 carte. Anche qui siamo in presenza di eventi elementari equiprobabili, applichiamo ancora lo schema di valutazione classico
L'evento A è casuale, infatti i casi favorevoli sono 10, dato che il mazzo ha 10 carte di spade:

$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}; \quad P(B)=0 \; e \; P(C)=1$

L'evento B è impossibile dato che non esiste una carta col numero 12.
L'evento C è certo, infatti i casi favorevoli sono 40, dato che il mazzo ha 12 figure e 28 carte con un numero.

$P(D)=\frac{1}{40}$ c'è un solo sette di denari su 40 carte.

$P(E)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1=10\%$ nel mazzo di 40 carte ci sono 4 assi.

- *Lanciando in aria 3 monete, quale dei seguenti eventi è più probabile?*
  a) Ottenere su 3 monete testa.
  b) Ottenere su 1 moneta testa e su 2 monete croce.

Per rispondere alla domanda occorre calcolare le probabilità dei due eventi. Applichiamo la definizione classica. Dobbiamo calcolare tutti gli eventi possibili e tutti gli eventi favorevoli.
Aiutiamoci con una tabella per elencare tutti i casi.

prima moneta	seconda moneta	terza moneta
T	T	T
C	T	T
T	C	T
T	T	C
C	C	T
C	T	C
T	C	C
C	C	C

I casi possibili sono 8.
I casi favorevoli all'evento “3 volte testa” sono 1. La probabilità di questo evento è quindi

$p=\frac{1}{8}=0{,}125=12{,}5$.

I casi favorevoli all'evento “1 moneta testa e 2 monete croce” sono CCT, CTC, TCC, quindi 3, allora

$p=\frac{3}{8}=0{,}375=37{,}5$.

Possiamo concludere che l'evento più probabile è ottenere 1 testa e 2 croci.

- Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi la somma dei numeri ottenuti sia
  A. Il numero 1,
  B. il numero 12,
  C. il numero 6.

Valutiamo prima di tutto il numero dei casi possibili. Elenchiamo tutti gli esiti che si possono avere lanciando due dadi:

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	…	…	…	3 6
4 1	…	…	…	…	4 6
5 1	…	…	…	…	5 6
6 1	…	…	…	…	6 6

I casi possibili sono quindi 6x6 = 36.

A. Non è possibile ottenere il numero 1 lanciando due dadi, il numero minimo ottenibile è 2, perciò $p(A)=\frac{0}{36}=0$, l'evento è impossibile.

B. Il numero 12 si può ottenere in un solo caso quando esce su entrambi i dadi il 6, quindi $p(B)=\frac{1}{36}\approx 2{,}8\%$

C. Il numero 6 si può ottenere nei seguenti modi: 1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1, perciò $p(C)=\frac{5}{36}\approx 13{,}9\%$

Definizione frequentista

Se si considera una successione di eventi dello stesso tipo e che avvengono in condizioni simili come l'uscita di una determinata faccia in un dado truccato, si indica come frequenza relativa $F(E)$ il rapporto tra il numero v dei casi in cui si è verificato l'evento e il numero totale delle prove n , cioè $F(E)=\frac{v}{n}$.

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi intorno a un valore ben preciso al crescere del numero delle prove effettuate.

Si assume come probabilità dell'evento E il valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa dello stesso evento, all'aumentare del numero delle prove ripetute alle stesse condizioni:

$$P(E)\approx F(E)=\frac{v}{n}$$

L'errore che si commette diventa sempre più piccolo al crescere di n. La valutazione della probabilità così definita si chiama valutazione statistica, *a posteriori* o frequentista.

Anche l'ambito di applicazione di tale valutazione è limitato in quanto l'ipotesi che sta alla base della definizione è che l'evento a cui si vuole assegnare la probabilità sia pensabile come uno dei possibili risultati di una determinata prova e che tale prova sia ripetibile infinite volte nelle stesse condizioni.

Si fa molto uso di questo schema di valutazione per stime della probabilità in campo economico e sanitario.

- *In un'azienda alimentare si producono vasetti di marmellata. In uno studio di controllo sono stati evidenziati su 2500 vasetti analizzati 13 con imperfezioni e non idonei al commercio. Si valuti la probabilità dell'evento E="confezioni non idonee al commercio".*

Se si considera il campione dei vasetti analizzati significativo rispetto alla produzione complessiva delle confezioni prodotte possiamo considerare la frequenza relativa dell'evento E come misura della probabilità.

Quindi $P(E)=F(E)=\frac{13}{2500}=0{,}0052$.

- *Qual è la probabilità che un certo guidatore faccia un incidente con la macchina? Quanto deve pagare, come premio, a una compagnia di assicurazioni in modo che, se fa un incidente, la compagnia paghi per intero il danno?*

Per rispondere a queste domande le compagnie di assicurazioni sono in grado di stimare, sulla base dei numerosissimi incidenti stradali che si verificano ogni anno, qual è la probabilità che un guidatore provochi un incidente d'auto.

- *Un sacchetto contiene 10 palline, alcune bianche, altre nere. Si estrae a caso, senza guardare nel sacchetto un pallina, si guarda il colore e si rimette il sacchetto nella pallina. Dopo 100 estrazioni abbiamo contato 78 volte la pallina bianca e 22 la pallina nera. Possiamo allora ipotizzare che nel sacchetto ci siano 8 palline bianche e 2 palline nere.*

Definizione soggettiva

E' la definizione di probabilità che abbiamo dato all'inizio di questo paragrafo: la probabilità dell'evento A è quel valore p che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita unitaria.

Se un individuo valuta pari $\frac{1}{4}=25\%$ la probabilità di un certo evento E vuol dire che è disposto a pagare 25 euro a un ipotetico banco per riceverne 100 nel caso che E si verifichi. Naturalmente la scommessa va accettata anche come banco che deve essere disposto a scommettere il $75\%=1-p$ sul fatto che E non si verifichi: $P(E)=\frac{q}{S};\ dove\ q=25\ e\ S=100$.

Le scommesse

La definizione soggettiva si applica anche alle scommesse. Supponiamo di scommettere sul verificarsi di un evento E a cui attribuiamo probabilità p . Stabiliamo inoltre di giocare e quindi perdere q euro nel caso l'evento non si verifichi e di guadagnare g euro nel caso l'evento si verifichi. In genere le scommesse si indicano in questo modo: si mette in rapporto la perdita con il guadagno $\frac{q}{g}$ o anche $q:g$ che si legge $q\ a\ g$. In questo caso q e g si chiamano le **poste** o le **messe** del gioco.

Che relazione c'è tra questo rapporto e la probabilità?

Se in un grande numero di scommesse così congegnate vincessimo la somma g una frazione p di volte e perdessimo la somma q una frazione $1-p$, affinché il gioco risulti equo dovremmo avere $p\cdot g - q\cdot(1-p) = 0$. Isoliamo p nell'uguaglianza.

$$p\cdot g - q\cdot(1-p) = 0 \ \rightarrow\ p\cdot g-q+q\cdot p = 0 \ \rightarrow\ p\cdot(g+q) = q \ \rightarrow\ p = \frac{q}{g+q}$$

La relazione è dunque questa: la probabilità di una scommessa $q:g$ è data dalla perdita q al numeratore e al denominatore la somma complessiva che si incassa data dal guadagno più quello che si è scommesso.

■ *Supponiamo che la vincita ai mondiali di calcio dell'Italia sia data* $5\ a\ 12$ *o* $5:12$ *o* $\frac{5}{12}$ *dai bookmaker inglesi. Quale probabilità assegnano gli allibratori alla vincita dell'Italia?*

$$P(E) = \frac{5}{5+12} = \frac{5}{17} = 0{,}294$$

■ *Leggo sul sito del Corriere della Sera, che per la partita Real Madrid-Barcellona, che si giocherà questa sera, la vittoria del Real Madrid viene data 1 a 2,60.*

Significa che scommettendo 1 euro possiamo vincerne 2,60: la vittoria del Real Madrid è stata quindi stimata dal giornale $p=\frac{1}{2{,}60}=\frac{100}{260}=0{,}38...$ circa 38%.

6 Quali tra i seguenti numeri possono essere misure di probabilità?

1,5	0,5	25%	100%	-0,1
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	0	120%	$0,\overline{3}$

7 Elenca i casi favorevoli all'evento: "lanciando tre dadi la somma delle facce è 5".

8 Per uno studente è indifferente ricevere 350 € senza condizioni, oppure un motorino del valore 1500 € solo se sarà promosso. Qual è la probabilità che lo studente attribuisce alla sua promozione? $P(E)=0{,}23$

9 Uno studente è disposto a puntare 10 € per riceverne 60 solo se sarà interrogato in matematica. Quale probabilità lo studente attribuisce all'eventualità di essere interrogato in matematica? $P(E)=0{,}17$

10 Tre amici si sfidano ad una gara di scacchi. Giudico che due di essi si equivalgano, mentre ritengo che il terzo abbia probabilità doppia di ciascuno degli altri due sfidanti. Quale probabilità attribuisco a ciascuno dei tre giocatori? $P(A)=P(B)=0{,}25$, $P(C)=0{,}50$

11 Un'urna contiene 3 palline bianche, 5 rosse e 7 verdi tutte uguali e distinguibili solo per il colore. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna si verificano i seguenti eventi.

A) Si estrae una pallina rossa.
B) Si estrae una pallina bianca.
C) Si estrae una pallina bianca o verde. [P(A)=1/3; P(B)=1/5; P(C)=2/3]

12 Si lanciano 3 monete equilibrate (testa e croce sono egualmente possibili); calcolare la probabilità di ottenere 2 croci e 1 testa.

13 Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi regolari la somma dei numeri che si presentano sia 6.

R. $P(E)=\frac{5}{36}$

14 Un'urna contiene 100 palline identiche, numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia un multiplo di 10. R. $P(E)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

15 Un'urna contiene 15 palline identiche, numerate da 1 a 15. Calcolare la probabilità che estraendo a caso due palline dall'urna, la loro somma sia 10. R. $P(E)=\frac{8}{210}=\frac{4}{105}$

16 Calcola la probabilità che lanciando 4 volte una moneta equilibrata escano solo 2 teste.

R. $P(E)=\frac{3}{8}$

17 Pago alla mia compagnia di assicurazione un premio di 450 € l'anno per avere assicurato contro il furto la mia auto che ho pagato 12000 €. Quale probabilità viene attribuita dalla compagnia al furto dell'auto?

R. $P(E)=0{,}0375$

18 E' più facile vincere un premio acquistando un biglietto nella lotteria A che prevede 10 premi di ugual valore su un totale di 5000 biglietti venduti o nella lotteria B che prevede 7 premi su 3000 biglietti venduti? Se ogni premio per entrambe le lotteria ammonta a 1000 euro, quale dovrebbe essere un prezzo equo per la lotteria A? Quale il prezzo equo per la lotteria B?
R. [Conviene comprare un biglietto nella lotteria B; Prezzo equo A=2€; Prezzo equo B=2,23€]

19 In Italia nel 2005 sono stati denunciati dalla polizia 2.579.124 crimini penali, nello stesso periodo in Danimarca sono stati denunciati 432.704 crimini. Sulla base di questi dati ritieni che sia più sicuro vivere in Danimarca?

20 In un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estraendo a caso una carta essa sia

a) un re;
b) una carta a denari;
c) una carta minore di 8;
d) una carta con punteggio pari.

21 Un mazzo di carte francesi è composto da 54 carte, 13 per seme e due jolly, i semi sono cuori e quadri di colore rosso, picche e fiori di colore nero. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una carta

a) sia un jolly,
b) sia un re,
c) sia l'asso di picche,
d) sia una carta di colore rosso.

22 Da un mazzo di 40 carte napoletane vengono tolte tutte le figure, calcola la probabilità di estrarre una carta a denari.

23 In un sacchetto vengono inserite 21 tessere, su ciascuna delle quali è stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Calcola la probabilità che estraendo a caso una tessera essa sia:

a) una consonante
b) una vocale
c) una lettera della parola MATEMATICA.

24 Nelle estrazioni del Lotto si estraggono dei numeri a caso compresi tra 1 e 90. Calcola la probabilità che il primo numero estratto si

a) il 90
b) un numero pari
c) un multiplo di 3
d) contenga la cifra 1.

25 In un ipermercato si sono venduti in un anno 1286 cellulari di tipo A e 780 cellulari di tipo B. Mentre erano ancora in garanzia sono stati restituiti 12 cellulari di tipo A e 11 cellulari di tipo B perché malfunzionanti. Comprando un cellulare di tipo A, qual è la probabilità che sia malfunzionante? Qual è la probabilità che sia malfunzionante un cellulare di tipo B?

26 Quando vado al lavoro parcheggio l'auto nei parcheggi a pagamento ma non sempre compro il biglietto del parcheggio. Precisamente lo compro il lunedì e il giovedì, non lo compro il martedì e il mercoledì, il venerdì vado sempre con l'auto di un collega, il sabato e la domenica non lavoro. Quando vado al lavoro, che probabilità ho di prendere la multa per non aver pagato il parcheggio?

27 Un semaforo mostra il rosso per 120”, il verde per 60”, il giallo per 10”. Qual è la probabilità di incontrare il semaforo quando è verde?

28 La seguente parte di tabella tratta da una pubblicazione di Eurostat (la struttura dell'Unione Europea per le statistiche) indica il totale dei cittadini residenti di alcuni paesi europei distinguendo se sono indigeni, se appartengono a paesi dell'Unione Europea, oppure se non vi appartengono.

	Popolazione per cittadinanza (in milioni al 1.1.2006)			
	Indigeni	Non Indigeni		
	Totale	Totale	… appartenenti a paesi EU-27	… appartenenti a paesi non EU-27
EA-13	294 994	21 697	7 734	13 963
BE	9 611	900	620	280
BG	7 693	26	4	22
CZ	9 993	258	94	164
DK	5 157	270	74	196
DE (2)	75 149	7289	2 257	5 032
EE (3)	1 103	242	5	237
IE	3 895	314	215	99
EL	10 241	884	157	727
ES	39 756	4003	1 326	2 677
FR	59 489	3510	1 314	2 196
IT	56 081	2671	539	2 132

Le sigle dei paesi indicate nella tabella sono le seguenti:
BE: Belgio
BG: Bulgaria
CZ: Repubblica Ceca
DK: Danimarca
DE: Germania
EE: Estonia
IE: Irlanda
EL: Grecia
ES Spagna
FR Francia
IT Italia
EU-27 sono i 27 paesi appartenenti all'unione Europea dal 1 gennaio 2007
EA-13 sono i 13 paesi appartenenti all'euro dal 1 gennaio 2007

Valuta le probabilità che estratto un cittadino in Italia e in Francia questi siano non appartenenti all'Europa dei 27.

►3. Probabilità dell'evento complementare

Abbiamo visto nelle regole della probabilità l'importante relazione $P(\overline{E})=1-P(E)$, cioè che la probabilità dell'evento complementare è uguale a uno meno la probabilità dell'evento.
Consideriamo la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia un punteggio uguale a 5. Considerando equiprobabili l'uscita di una qualsiasi faccia del dado, i casi possibili sono 36 (ogni faccia del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado), mentre i casi favorevoli all'evento sono 4, precisamente (1,4), (4,1), (2,3) e (3,2). Quindi $P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.
Se vogliamo conoscere la probabilità dell'evento complementare cioè la probabilità che la somma delle due facce del dado non sia uguale a 5, risulterebbe piuttosto laborioso trovare tutti i casi in cui la somma delle due facce sia uguale a 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, si può invece applicare la regola $P(\overline{E})=1-P(E)$ cioè nel nostro caso $P(\overline{E})=1-P(E)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.
Dalla formula sulla probabilità dell'evento complementare ricaviamo anche che $P(E)=1-P(\overline{E})$ che risulta molto utile nel risolvere alcuni problemi. A volte è più facile o indispensabile calcolare la probabilità dell'evento complementare che calcolare direttamente la probabilità dell'evento.

29 La seguente tabella è tratta dalla tavola di mortalità dei maschi al 2002 relativa a una popolazione di 100000 individui:

Fascia di età	$0\le x<20$	$20\le x<40$	$40\le x<60$	$60\le x<80$	$80\le x<100$	$x\ge 100$
N. Decessi	997	1909	7227	39791	49433	643

Calcola la probabilità per un individuo dell'età di 20 anni di vivere almeno per altri 40 anni.
R. $P(E)=0{,}91$

30 Calcola la probabilità di vincita dell'Italia ai campionati mondiali di calcio se i bookmaker scommettono su una sua vincita 12 a 5.
R. $P(E)=0{,}71$

31 In un incontro di boxe il pugile Cacine viene dato a 1:7 contro il detentore del titolo Pickdur.
A) Secondo gli allibratori, quale la probabilità ha Cacine di conquistare il titolo?
B) Quali le poste per Pickdur?
R.[$P(A)=\frac{1}{8}=0{,}125$,poste per Pickdur 7:1]

32 Quanto devo puntare su Celestino, che viene dato vincente 4:21 per riscuotere 500 €? R.[80€]

33 Un cubo di legno viene verniciato e successivamente segato parallelamente alle facce in modo da ottenere 1000 cubetti. Quanti tagli sono necessari? Qual è la probabilità che, una volta mescolati i cubetti, si estragga:
A) un cubetto con una sola faccia verniciata,
B) un cubetto con due facce verniciate,
C) un cubetto con nessuna faccia verniciata.
R. [Tagli necessari =27 $P(A)=0{,}384$ $P(B)=0{,}096$ $P(C)=0{,}512$]

34 In un circolo vi sono 100 soci. Di essi si sa che 44 sanno giocare a dama, 39 a scacchi, 8 sanno giocare sia a dama che a scacchi. Estraendo a sorte uno dei 100 soci, qual è la probabilità che sia una persona che non sappia giocare ad alcun gioco. R. $P(E)=0{,}25$

35 Da un mazzo di 40 carte si estrae 1 carta. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
A) La carta non è di spade;
B) La carta non è una figura;
C) La carta non è un 2. R. $P(A)=\frac{3}{4}$; $P(B)=\frac{7}{10}$; $P(C)=\frac{9}{10}$

36 Calcola la probabilità che lanciano 4 volte una moneta equilibrata esca almeno una testa.
R. $P(E)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

►4. Probabilità dell'unione di due eventi

La misura della probabilità si può applicare a tutti gli eventi individuati dall'insieme delle parti degli eventi elementari $\wp(\Omega)$. Qualsiasi evento si può definire come sottoinsieme dell'insieme elementare (elencando gli eventi elementari che ne fanno parte) oppure enunciando una proposizione vera nel caso in cui l'evento si verifichi. Possiamo quindi poter esprimere la probabilità su eventi composti da due o più eventi di $\wp(\Omega)$ attraverso le operazioni di unione e intersezione tra insiemi che corrispondono alle operazioni di disgiunzione inclusiva e di congiunzione nelle proposizioni.
Per la probabilità dell'evento unione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro incompatibili e eventi tra loro compatibili.

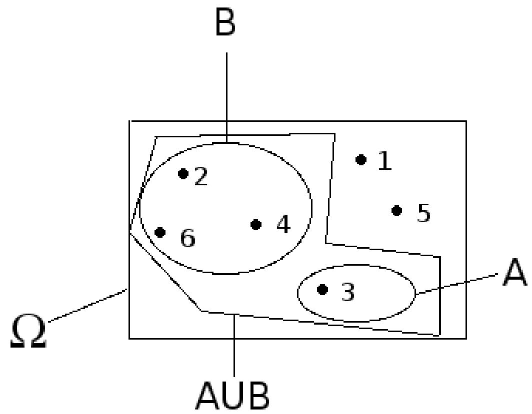
Unione di due eventi tra loro incompatibili

Abbiamo già visto questo caso quando abbiamo definito la probabilità. Due eventi si dicono incompatibili, quando non si possono verificare contemporaneamente: cioè quando $A\cap B=\emptyset$. In questo caso la probabilità dell'evento unione è dato dalla uguaglianza:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

■ *Nel lancio di un dado regolare calcolare la probabilità dell'uscita del numero 3 o di un numero pari.*

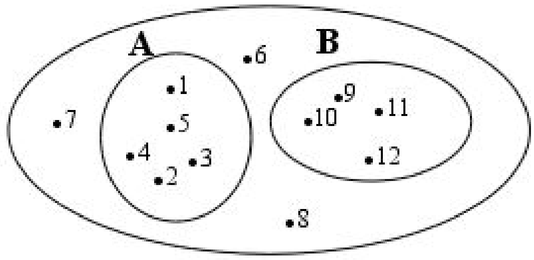
A) Uscita del numero 3
B) Uscita di un numero pari



Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi. Dato che i due eventi sono incompatibili, cioè: $A\cap B=\emptyset$: abbiamo $P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$

■ *Da un'urna che contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero minore di 6 o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:
A) Si presenta una pallina con il numero minore di 6.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.
Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.



I due eventi sono incompatibili quindi:

$$A\cap B=\emptyset \quad \rightarrow \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Unione di due eventi tra loro compatibili

Se $A \cap B \neq \emptyset$ i due eventi si possono verificare congiuntamente. In questo caso la probabilità dell'unione dei due eventi sarà data da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

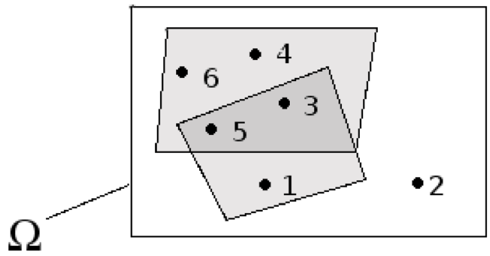
Può essere utile per avere un'idea intuitiva di questa regola pensare alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi. Se voglio la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su A che addiziono a quella presente su B a cui devo togliere la massa presente su $A \cap B$ che è stata contata due volte.

- *Consideriamo il lancio di un dado regolare, vogliamo trovare la probabilità dell'uscita di un numero maggiore di 2 o di un numero dispari.*

I due eventi sono:

A) Uscita di un numero maggiore di 2
B) Uscita di un numero dispari

I due eventi sono compatibili



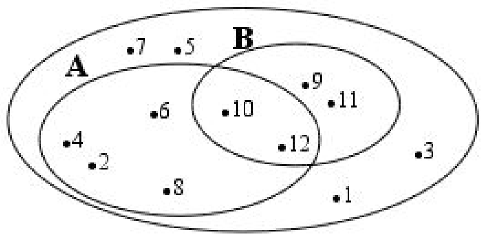
$A \cap B = \{5,3\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

- *Da un'urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero pari o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:

A) Si presenta una pallina con il numero pari.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.

Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.
I due eventi sono compatibili quindi**:**



$A \cap B = \{10,12\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

- *Calcolare la probabilità che scegliendo a caso una carta da un mazzo di carte francesi di 54 carte si prenda una carta di picche o un re.*

Gli eventi sono compatibili in quanto è possibile estrarre una carta che verifichi entrambi le condizioni: un re di picche. Pertanto:

evento P = "estrarre una carta di picche" $p(P) = \frac{13}{54}$ le carte francesi sono 54, contengono 13 carte per ognuno dei 4 semi e 2 jolly.

Evento R = "estrarre un re" $p(R) = \frac{4}{54}$, i re sono 4, uno per ciascun seme.

Evento $P \cap R$ "estrarre una carta di picche che sia re" $p(P \cap R) = \frac{1}{54}$

Evento $P \cup R$ "estrarre una carta di picche o un re"

$p(P \cup R) = p(P) + p(R) - p(P \cap R) = \frac{13}{54} + \frac{4}{54} - \frac{1}{54} = \frac{13+4-1}{54} = \frac{16}{54} \approx 29{,}6\,\%$

- *Calcolare la probabilità che estraendo a caso un numero della tombola esso contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.*

La prima domanda da farsi è se i due eventi sono compatibili o incompatibili. Poiché esistono numeri della tombola che contengono la cifra 5 e che sono anche multipli di 5 (per esempio 15, 50...) i due eventi sono compatibili. Di conseguenza bisogna applicare la regola $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

A = "estrarre un numero che contiene la cifra 5" questi numeri sono: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, …, 59, 65, 75, 85, in tutto 18 ne segue che $p(A)=\frac{18}{90}$;

B = "estrarre n multiplo di 5" i multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, … due per ogni decini, quindi 18 in tutto, ne segue che $p(B)=\frac{18}{90}$;

$A\cap B$ = "estrarre un cifra che contiene 5 ed è multiplo di 5" questi numeri sono 5, 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85 in tutto sono 10 $p(A\cap B)=\frac{10}{90}$;

$A\cup B$ = "estrarre un numero che contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5"

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{90}+\frac{18}{90}-\frac{10}{90}=\frac{26}{90}\approx 0{,}29\approx 29\%$.

37 Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero dispari o minore di 4.

R. $P(E)=\frac{2}{3}$

38 Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero pari o minore di 2.

R. $P(E)=\frac{2}{3}$

39 Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità che sia un 3 o una carta di spade

R. $P(E)=\frac{13}{40}$

40 Da un'urna che contiene 5 palline rosse, 8 palline blu, 12 palline bianche, 15 palline gialle, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina sia rossa o blu o gialla. R. $P(E)=\frac{7}{10}$

41 Da un'urna che contiene 30 palline identiche numerate da 1 a 30, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che il numero della pallina sia minore di 20 o multiplo di 4. R. $P(E)=\frac{11}{15}$

42 Per un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità di estrarre

a) un asso o un re,
b) un sette o una carta a bastoni,
c) una figura o una carta a denari.

43 Calcola la probabilità che lanciando un dado a sei facce esca un numero pari o un multiplo di 3.

44 Nel gioco della tombola si estrae una pallina numerata da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità che estraendo la prima pallina essa riporti

a) un multiplo di 5 o un multiplo di 10,
b) un numero pari o un multiplo di 5,
c) un numero che contenga la cifra 5 o la cifra 2.

►5. La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

Dati due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ ci proponiamo di calcolare la probabilità dell'evento intersezione cioè $P(A \cap B)$ partendo dalla probabilità degli eventi componenti *P(A)* e *P(B)*. Si tratta quindi di stimare con quale probabilità i due eventi avvengono congiuntamente. Occorre innanzitutto verificare che i due eventi non siano incompatibili in quanto in questo caso l'evento intersezione è impossibile.
Per la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro **indipendenti** e eventi tra loro **dipendenti**.

Intersezione di due eventi tra loro indipendenti

Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non cambia la probabilità del verificarsi di B.

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando una moneta e un dado regolari esca testa e un numero maggiore di 4.*

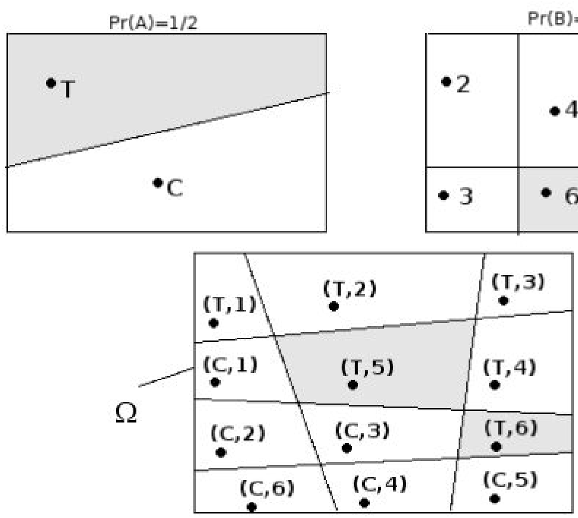
Evento A = "Uscita di Testa nel lancio di una moneta" $P(A)=\frac{1}{2}$.

Evento B = "Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado" $P(B)=\frac{2}{6}$.

Evento $(A \cap B)$ = "Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado".
Vediamo come determinare $P(A \cap B)$.
Notiamo subito una situazione diversa rispetto a quella precedente dell'unione di due eventi. Nel caso precedente, lo spazio degli eventi era lo stesso per l'evento A per l'evento B e per l'evento unione $(A \cup B)$.
Ora invece per l'evento A l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_1=\{T, C\}$, per l'evento B invece, l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$. L'evento $(A \cap B)$ ha il seguente insieme degli eventi elementari: $\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$.
Lo spazio degli eventi elementari dell'intersezione è dato dal prodotto cartesiano dello spazio elementare di A moltiplicato per quello di B. Si può calcolare la probabilità in due modi:

<u>1° modo</u>
Indicare i casi favorevoli e i casi possibili rispetto all'evento intersezione:
i casi favorevoli all'evento sono 2 $(A \cap B)=\{(T,5);(T,6)\}$;
i casi possibili sono 12 $\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$.

$P(A \cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$



<u>2° modo</u>
Dato che i due eventi non si influenzano, supponiamo di procedere con due scelte successive: prima il lancio della moneta con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ e poi il lancio del dado con probabilità pari a $\frac{2}{6}$.
Passando dalla prima scelta alla seconda scelta i casi possibili diventano 12 in quanto i due casi possibili del lancio della moneta si compongono con i sei casi possibili del lancio del dado. I casi favorevoli sono due, uno per il lancio della moneta che si compone con i due casi favorevoli nel lancio del dado. Quindi si tratta di moltiplicare le probabilità dei singoli eventi.

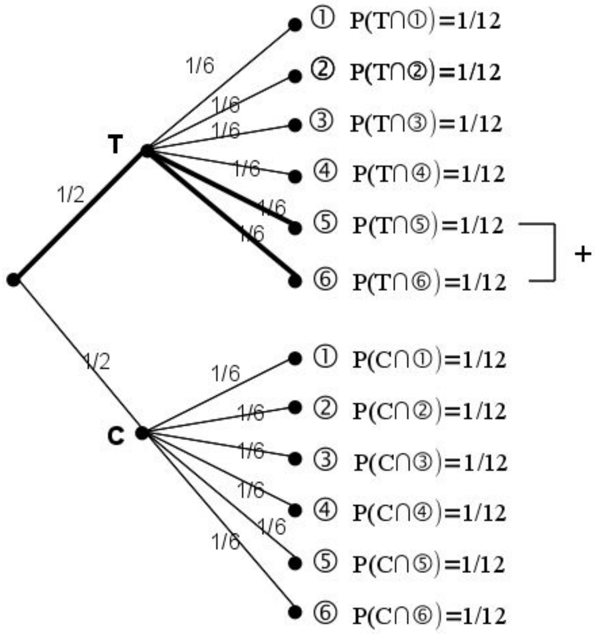
- Evento *A = Uscita di Testa nel lancio di una moneta* $P(A)=\frac{1}{2}$
- Evento *B = Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado* $P(B)=\frac{2}{6}$
- Evento $(A\cap B)$ *= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado* $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{12}$

Dati due eventi aleatori A e B tra loro indipendenti la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è data dalla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B:

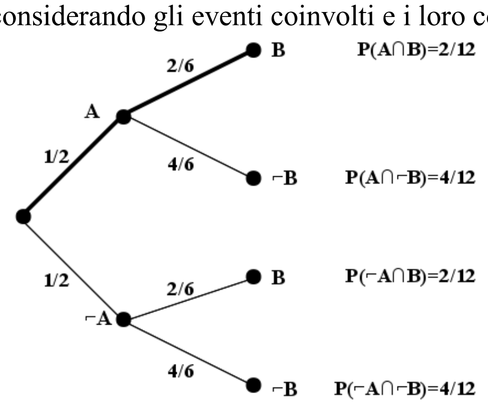
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Diagrammi ad albero

Una rappresentazione grafica che può risultare utile nello studio della probabilità dell'evento intersezione detto anche studio delle **probabilità composte** è il diagramma ad albero. Le linee dell'albero si dicono **rami**, mentre i punti da cui partono e arrivano i rami si dicono **nodi,** il nodo iniziale si chiama **radice**.
La costruzione di un diagramma ad albero nel caso delle probabilità composte consente di eseguire un'analisi completa di tutti i possibili esiti di una prova. Ogni percorso dell'albero che va dalla radice al nodo terminale indica una sequenza di eventi congiunti, incompatibile con qualsiasi altro percorso dell'albero. La probabilità di ogni singolo evento si indica sui rami, allora moltiplicando le probabilità che si incontrano nel percorso si ottiene la probabilità della congiunzione degli eventi che formano il percorso. Dato che ogni percorso che va dalla radice al nodo terminale individua eventi incompatibili, se vogliamo trovare l'unione di due o più percorsi possiamo semplicemente sommarli.
L'esempio precedente può essere schematizzato in questo modo:



L'albero può essere semplificato considerando gli eventi coinvolti e i loro complementari.



- *In un'urna abbiamo tre palline bianche e due nere. Facciamo due estrazioni rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità dell'uscita di una pallina nera nelle due estrazioni.*

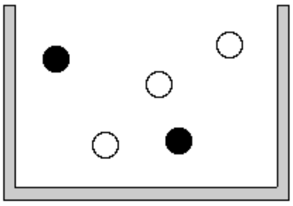
Evento B_1= nella prima estrazione pallina bianca $P(B_1)=\frac{3}{5}$

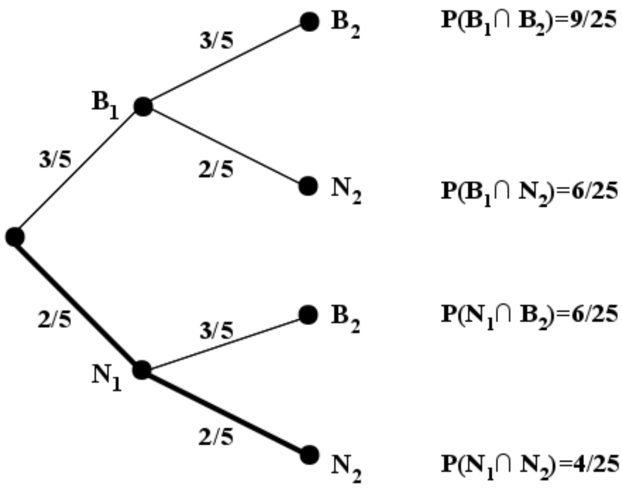
Evento B_2= nella seconda estrazione pallina bianca $P(B_2)=\frac{3}{5}$ in quanto la pallina si rimette nell'urna

Evento N_1= nella prima estrazione pallina nera $P(N_1)=\frac{2}{5}$

Evento N_2= nella seconda estrazione pallina nera $P(N_2)=\frac{2}{5}$

Evento $(N_1 \cap N_2)$ = nelle due estrazioni pallina nera $P(N_1 \cap N_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ in quanto i due eventi sono indipendenti.





Il problema è sempre lo stesso: calcolare una probabilità su un insieme prodotto partendo dalle probabilità degli eventi componenti. Devo moltiplicare la probabilità di avere nera nella prima estrazione $P(N_1)=\frac{2}{5}$ con la probabilità di avere nera nella seconda estrazione $P(N_2)=\frac{2}{5}$ in quanto, l'uscita della prima pallina nera, evento considerato ora come avvenuto, non influenza la probabilità di avere nera alla seconda estrazione in quanto la pallina estratta viene rimessa nell'urna.

Le domande che posso fare su questo esperimento sono relative allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. ove $\Omega=\{(B_1, B_2);(B_1, N_2);(N_1, B_2);(N_1, N_2)\}$ sono del tipo "Quale è la probabilità che escano palline di diverso colore", "Qual è la probabilità che la prima pallina sia bianca", ecc.

Il problema del Cavalier de Méré

Il Cavalier de Méré pose al grande matematico francese Blaise Pascal nel 1654 il seguente problema: *perché scommettendo alla pari sull'evento A= "ottenere almeno una volta un 6 in 4 lanci di un dado" ho accumulato una fortuna, mentre rischio la rovina scommettendo alla pari sull'evento B= "ottenere almeno una coppia di 6 in 24 lanci di due dadi".*

Scommettere alla pari 1:1 significa assegnare alla probabilità degli eventi A e B il valore pari a $\frac{1}{2}$.

Consideriamo la probabilità dell'evento A composto dai quattro eventi indipendenti ma non incompatibili E_1=ottenere 6 nel primo lancio, E_2=ottenere 6 nel secondo lancio, E_3=ottenere 6 nel terzo lancio, E_4=ottenere 6 nel quarto lancio.

In questo caso come è stato osservato in precedenza, conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{A}=(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4})$ = "non ottenere un 6 in quattro lanci di un dado". Dato che gli eventi sono indipendenti e equiprobabili e $P(\overline{E_1})=P(\overline{E_2})=P(\overline{E_3})=P(\overline{E_4})=\frac{5}{6}$. I valori di ciascun evento vanno moltiplicati tra loro per la regola vista in precedenza. Quindi $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0{,}482$.
La probabilità dell'evento A sarà quindi superiore a 0,5 in quanto $P(A)=1-P(\overline{A}) = 1-0{,}482 = 0{,}518$ e in un numero considerevole di scommesse il Cavalier de Méré accumulava una fortuna.
Consideriamo ora la probabilità dell'evento B, dove valgono considerazioni analoghe. Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{B}$. Dato che i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36 il caso favorevole all'evento 6 nel primo dado e 6 nel secondo dado è uno soltanto. Se $P(B) = \frac{1}{36} \rightarrow p(\overline{B}) = 1-P(B) = \frac{35}{36}$. Dato che i lanci dei due dadi sono 24 avremo $p(\overline{B}) = \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}509$ da cui $P(B) = 1-0{,}509 = 0{,}491$ è spiegato come mai in un grande numero di scommesse scommettendo alla pari il Cavalier de Méré si rovinasse.

45 Nel lancio di due monete qual è la probabilità che una almeno sia croce? R. $P(E)=\frac{3}{4}$

46 Nel lancio di due dadi qual è la probabilità di avere un totale di 8 o due numeri uguali? R. $P=\frac{5}{18}$

47 Qual è la probabilità nel lancio di due dadi che la somma dei punti sia almeno 9? R. $P(E)=\frac{15}{18}$

48 Punto 7 euro nel lancio di due dadi sulla somma delle facce uguale a 5. Quanto devo ricevere perché il gioco sia equo? R. 63 €

49 La probabilità che un proiettile colpisca un determinato bersaglio è 0,5. Qual è la probabilità che tre proiettili lanciati uno dopo l'altro colpiscano tutti il bersaglio. R. $P(E)=0{,}125$

50 Due persone giocano con le dita di entrambe le mani a pari e dispari. Con una posta 1:1 conviene giocare sul pari o sul dispari? R. *indifferente*

51 Un allievo cuoco prepara la cena. La probabilità che la minestra sia troppo salata è pari a 0,3 e che l'arrosto bruci sia pari a 0,4. Qual è la probabilità che la cena riesca bene? R. $P(E)=0{,}42$

52 Una scopa elettrica è formata da due apparati: il motore che si guasta una volta su 10 dopo un anno e la carrozzeria che si rompe una volta su 100 dopo un anno. Che probabilità ha la scopa elettrica di essere funzionante dopo un anno? R. $P(E)=89{,}1\,\%$

53 Una coppia ha caratteri ereditari tali che ogni loro figlio ha probabilità pari a 1/4 di essere malato. I genitori vorrebbero avere due figli.

A) Qual è la probabilità che entrambi siano sani?
B) Qual è la probabilità di avere almeno un figlio malato R. P(A)=9/16; P(B)=7/16

54 Determinare la probabilità che lanciando tre volte una moneta si presentino

A) 3 Teste
B) 1 Testa
C) 2 Teste R. P(A)=1/8; P(B)=3/8; P(C)=3/8

55 Nel lancio di una moneta e di un dado calcolare la probabilità di:

A) Ottenere Croce e il 6
B) Ottenere Testa e un numero multiplo di 2
C) Ottenere Croce e un numero maggiore di 2 R. P(A)=1/12; P(B)=1/4;P(C)=1/3

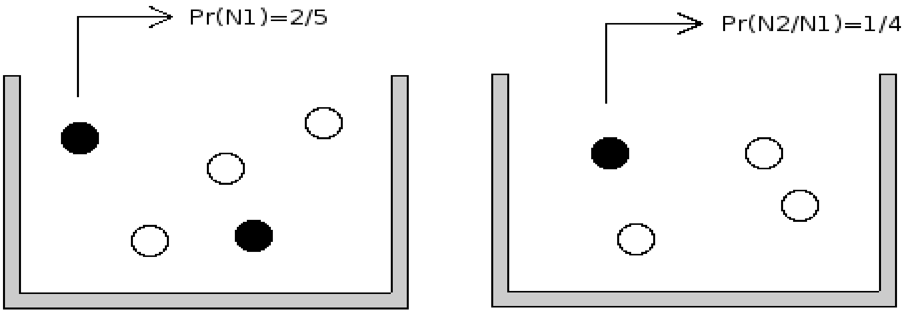
56 In un'urna ci sono 6 palline, di cui 2 nere e 4 bianche: calcola la probabilità di estrarre palline di diverso colore nel caso in cui la prima pallina viene rimessa nell'urna. R. P(E)=5/9

57 Un'urna U1 contiene 10 palline rosso e 15 bianche, un'urna U2 contiene 12 palline rosso e 13 palline bianche. Calcola la probabilità che estraendo una pallina da U1 e una pallina da U2 siano entrambe rosse.

Intersezione di due eventi tra loro dipendenti

- *Si richiede la probabilità di avere due palline nere in due estrazioni in un'urna contenente tre palline bianche e due nere, questa volta però senza rimettere la pallina nell'urna.*

Dato che vogliamo calcolare la probabilità dell'evento intersezione $(N_1 \cap N_2)$ questa sarà data dalla probabilità dell'evento N_1 moltiplicata per la probabilità dell'evento N_2 dopo che si è verificato l'evento N_1. La probabilità dell'evento N_2 dopo il verificarsi di N_1 non è la stessa dell'esperimento precedente in quanto la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.



$P(N_2/N_1)$ significa probabilità di N_2 dopo che si è verificato N_1.

La probabilità dell'insieme intersezione diventa: $P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

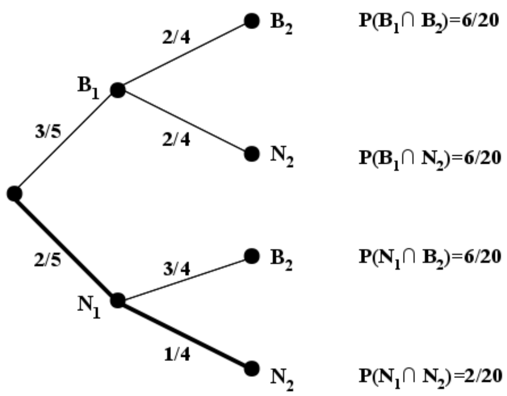
Esaminiamo le probabilità di questo esperimento (estrazione dall'urna senza rimettere la pallina nell'urna) degli eventi elementari appartenenti a Ω con $\Omega = \{(B_1, B_2); (B_1, N_2); (N_1, B_2); (N_1, N_2)\}$

- Una scatola di caramelle contiene 20 caramelle assortite alla frutta, incartate allo stesso modo e quindi irriconoscibili. Di esse 14 sono al limone. Fabio ne mangia 2. Qual è la probabilità che siano tutte e due al limone?

Evento E1 = "la prima caramella è al limone" $p(E1) = \frac{14}{20}$.

L' evento E2 = "la seconda è al limone" è dipendente dal primo, perché se Fabio ha mangiato una caramella al limone nella scatola rimangono 19 caramelle di cui 13 al limone $p(E2) = \frac{13}{19}$.

$p(E1 \cap E2) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190} \approx 0{,}479 \approx 47{,}9\%$.



►6. Probabilità condizionata

DEFINIZIONE. Si dice **probabilità condizionata** di A rispetto a B e si indica con $P(A/B)$ la probabilità di A dopo che si è verificato B

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE. Dati due eventi aleatori A e B qualsiasi la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è dato dalla probabilità di A moltiplicata la probabilità di B dopo che A si è verificato. In simboli $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$.

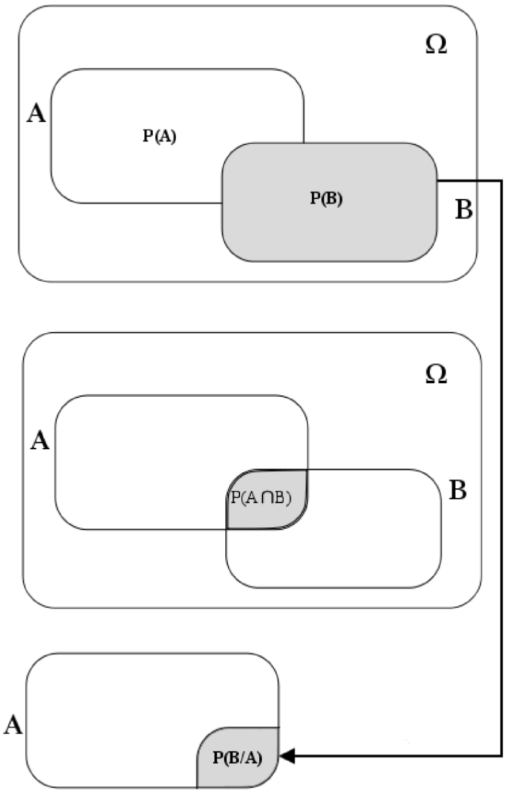
Dato che $A\cap B=B\cap A$ anche $P(A\cap B)=P(B\cap A)$ quindi $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$.
Possiamo ora meglio stabilire quando due venti sono dipendenti e quando sono indipendenti.

DEFINIZIONE. Due eventi $A, B\in \wp(\Omega)$ si dicono indipendenti se la probabilità di A e la probabilità di A subordinata a B sono uguali. Dipendenti nel caso contrario.
$P(A)=P(A/B)$ **eventi indipendenti**
$Pr(A)\neq P(A/B)$ **eventi dipendenti**

Il teorema delle probabilità totali vale sia nel caso di eventi dipendenti che indipendenti.

Cerchiamo di dare una interpretazione insiemistica alla probabilità condizionata.
Dalla uguaglianza del teorema delle probabilità composte isoliamo la probabilità condizionata per meglio individuare qual è il suo significato. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$ Da ciò segue

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$



Mettiamo a confronto $P(B)$ e $P(B/A)$ aiutandoci con i diagrammi di Venn.
Immaginiamo la misura della probabilità come una massa unitaria da spalmare sull'evento. La probabilità B è la quantità di massa da spalmare sull'evento B in relazione allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. Nell'ipotesi di ricevere un'ulteriore informazione dal verificarsi di A, questa informazione modifica la probabilità di B. L'insieme di riferimento per la probabilità di B non sarà più $\wp(\Omega)$, ma $\wp(A)$ e $P(B/A)$ sarà data dal rapporto della massa spalmata tra ciò che hanno in comune A e B cioè $P(A\cap B)$ e la probabilità di A cioè $P(A)$:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ .$$

Se $P(B/A)=P(B)$ la parte della massa unitaria spalmata su B e il rapporto tra la massa spalmata sull'intersezione tra A e B e la massa spalmata su A rimane invariato e i due eventi si dicono indipendenti.
Se $P(B/A)>P(B)$ si dice che l'evento B è correlato positivamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A aumenta la probabilità dell'evento B.
Se $P(B/A)<P(B)$ si dice che l'evento B è correlato negativamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A diminuisce la probabilità dell'evento B.

Osservazioni

Due eventi A e B tra loro incompatibili cioè tali che $P(A\cap B)=0$ sono fortemente dipendenti. Infatti

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0;\quad P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0\ .$$

La probabilità di A condizionato B è in genere diversa dalla probabilità di B condizionato A in quanto pur avendo lo stesso numeratore hanno denominatore diverso: $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\neq P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Dato che la probabilità dell'intersezione di due eventi è la stessa abbiamo

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)\ .$$

- *Conviene scommettere alla pari che in una classe composta da 23 alunni, due persone compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese?*

Scommettere alla pari significa intanto attribuire alla probabilità dell'evento A il valore di 0,5. Se la probabilità dell'evento è maggiore di 0,5 conviene scommettere altrimenti no.
Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $P(\overline{A})$ = la probabilità che nessuno dei 23 allievi compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese.
$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_2}\ldots\overline{A_{21}}\cap\overline{A_{22}}\cap\overline{A_{23}})$ dove $\overline{A_i}$ rappresenta la probabilità che il compleanno dell'alunno *i*-esimo non coincida con nessuno dei compleanni degli altri alunni.
Analizziamo alcune di queste probabilità e applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A_1})=\frac{365}{365}\ ;\quad P(\overline{A_2}/\overline{A_1})=\frac{364}{365}\ ;\quad P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{363}{365}\ ;\quad P(\overline{A_4}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=\frac{362}{365}\ ;\quad \ldots$$

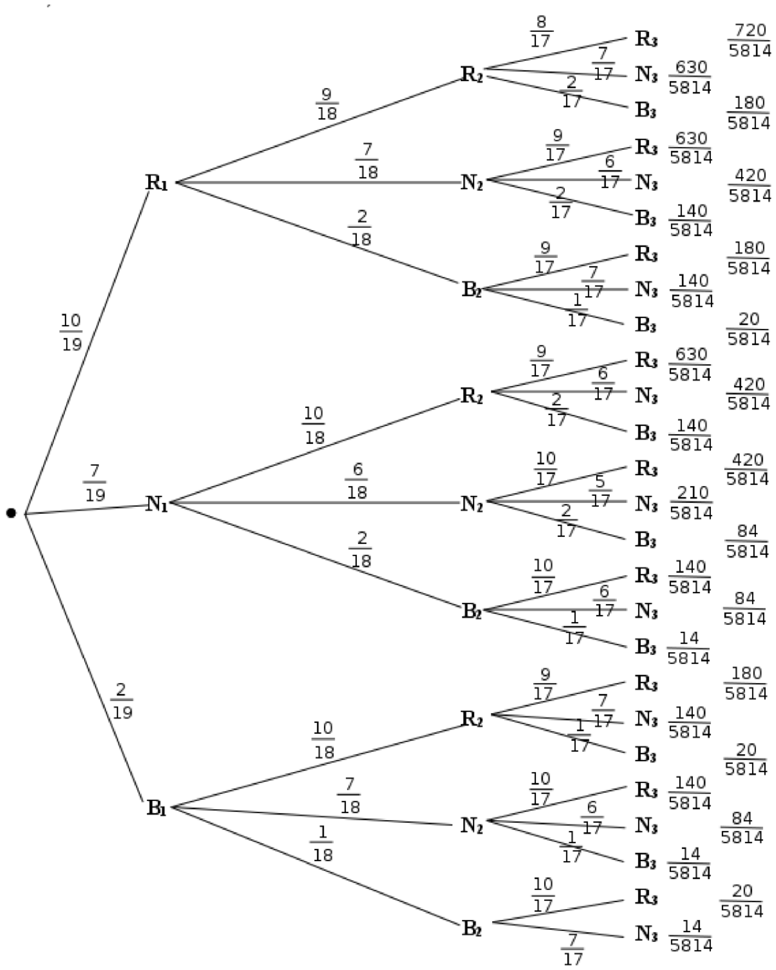
e così via fino ad arrivare a $P(\overline{A_{23}}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_2}\ldots\overline{A_{21}}\cap\overline{A_{22}}\cap\overline{A_{23}}) = \frac{343}{365}$.

Il primo allievo avrà la certezza di non avere alcun allievo che compie gli anni nello stesso suo giorno; il secondo allievo avrà una probabilità pari a 364 giorni su 365 di non compiere gli anni nello stesso giorno del primo, il terzo allievo una probabilità di 363 giorni su 365 condizionata a non compiere gli anni lo stesso giorno del primo e del secondo e così via fino alla probabilità dell'ultimo allievo pari a 343 giorni su 365 di non compiere gli anni lo stesso giorno dei propri compagni.
Ora applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdots\frac{345}{365}\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365} = \frac{365\cdot 364\cdot 363\ldots(365-23+1)}{365^{23}} = 0{,}493$$

Dato che $P(A) = 1-P(\overline{A}) = 1-0{,}493 = 0{,}507$.
Conclusione: conviene scommettere alla pari sull'evento A.

58 Un'urna contiene 10 palline rosse, 7 palline nere e 2 bianche. Estraendone simultaneamente, tre calcolare la probabilità: a) tutte e tre rosse; b) tutte e tre bianche; c) 1 rossa e 2 nere; d) tutte di colore diverso; e) una sola bianca. Di seguito il diagramma ad albero per aiutarti nella soluzione:



R. $P(A)=0{,}12\ ;\ P(B)=0\ ;\ P(C)=0{,}22\ ;\ P(D)=0{,}14\ ;\ P(E)=0{,}28$

59 Da un mazzo di 40 carte, si estrae una carta a caso. Determina la probabilità:

A) Che esca un Re
B) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscita una figura
C) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscito il seme di fiori
D) Che esca il seme di fiori dopo che è uscito un Re
E) Tra gli eventi A), B), C) e D) quali sono indipendenti?

$P(A)=\frac{1}{10};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(C)=\frac{1}{10};\ P(D)=\frac{1}{4};\ A\ e\ C$

60 Uno studente universitario ha la probabilità 0,3 di superare l'esame di matematica e 0,5 di superare l'esame di diritto privato. Se i due eventi sono indipendenti determinare la probabilità che lo studente ha di superare

A) Tutti e due gli esami
B) Almeno un esame

$P(A)=0{,}15;\ P(B)=0{,}65$

61 Un'urna contiene 5 palline bianche e 12 nere. Estraendole due a caso qual è la probabilità che siano dello stesso colore? $P(A)=0{,}56$

62 Uno studente ha la probabilità del 55% di prendere il debito in matematica, del 30% di prendere il debito in inglese e del 20% di prendere il debito in entrambe le materie. Valutare la probabilità di:

a) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo già preso in inglese.
b) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di averlo già preso in matematica.
c) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di non averlo preso in inglese.
d) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.
e) Non avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo preso in inglese.
f) Non avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.

R. $P(A)=67\%;\ P(B)=36\%;\ P(C)=50\%;\ P(D)=22\%;\ P(E)=33\%;\ P(F)=64\%$

►7. Dalla tavola statistica alla probabilità

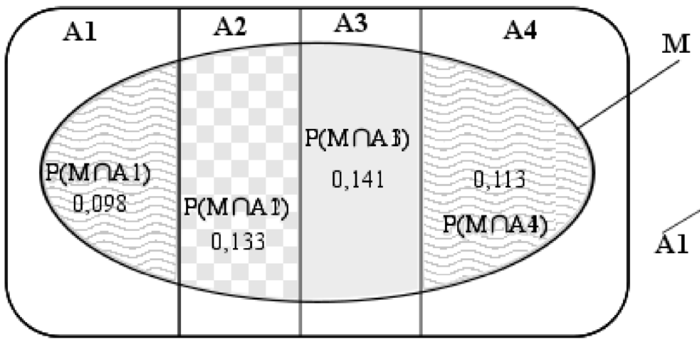
Consideriamo la seguente tabella che rappresenta la popolazione residente in Italia per classi di età e sesso al primo gennaio 2009 (migliaia di persone)

	$A_1: 0 \leq età < 20$	$A_2: 20 \leq età < 40$	$A_3: 40 \leq età < 60$	$A_4: età \geq 60$	Totale
M=Maschio	5867	8014	8473	6798	29152
F=Femmina	5541	7845	8649	8857	30892
Totale	11408	15859	17122	15655	60044

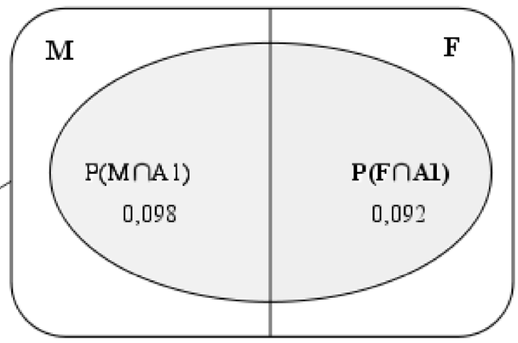
L'esperimento in questo caso è costituito da una classificazione dei residenti secondo il sesso: (Maschi e Femmine) e classi di età (A_1, A_2, A_3, A_4). I valori assoluti presenti all'interno delle celle rappresentano le persone che hanno in comune due caratteri, cioè . $M \cap A_1 = 5867,\ F \cap A_3 = 8649$ e così via.
In questo caso gli eventi elementari sono rappresentati dalle intersezione delle modalità dei due caratteri:
$\Omega = \{(M, A_1);(M, A_2);(M, A_3);(M, A_4);(F, A_1);(F, A_2);(F, A_3);(F, A_4)\}$
Dato che il campione analizzato è l'intera popolazione italiana residente possono essere la base per il calcolo della probabilità. Per far questo passiamo alle frequenze relative come nella tabella seguente.

	$A_1: 0 \leq età < 20$	$A_2: 20 \leq età < 40$	$A_3: 40 \leq età < 60$	$A_4: età \geq 60$	Totale
M=Maschio	0,098	0,133	0,141	0,113	0,485
F=Femmina	0,092	0,131	0,144	0,148	0,515
Totale	0,190	0,264	0,285	0,261	1,000

Aiutiamoci con i diagrammi di Venn per analizzare il significato dei totali di riga e di colonna. L'esempio si riferisce al totale della prima riga (0,098+0,133+0,141+0,113=0,485) e della prima colonna (0,098+0,092=0,190).



Totale prima riga=0,098+0,133+0,141+0,113=0,485



Totale prima colonna=0,098+0,092=0,190

Dato che gli eventi intersezione sono tra loro incompatibili i totali di riga e di colonna detti anche **totali marginali** rappresentano le probabilità delle modalità semplici Maschio e Femmina e A_1, A_2, A_3, A_4 relative alle classi di età.
Ma c'è di più. Nella tabella così strutturata abbiamo a disposizione sia la probabilità dell'intersezione delle modalità degli eventi sia la probabilità degli eventi stessi. Possiamo calcolare così anche le probabilità condizionate.
Le condizioni per trattare la probabilità come negli esempi precedenti sono che gli eventi presenti nelle righe e nelle colonne della tabella, siano eventi **esaustivi** e **incompatibili**, in altre parole devono rappresentare un insieme di eventi elementari. Questo è sempre possibile dati due venti elementari A e B considerando gli eventi complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Esempio

- *Il daltonismo è una malattia genetica collegata al sesso e si osserva più frequentemente nei maschi che nelle femmine. Le frequenze relative della seguente tabella, osservate su un campione molto elevato di popolazione, possono essere usate come probabilità.*

	P(Daltonico)	P(Non daltonico)	Totale
P(Maschio)	8,1%	45%	53,1%
P(Femmina)	0,5%	46,4%	46,9%
Totale	8,6%	91,4%	100%

P(D) indica la probabilità di essere daltonico, questa probabilità si legge nel totale marginale della prima colonna ed è pari a 8,6%. La probabilità di non essere daltonico P(N) è data dal totale marginale della seconda colonna e rappresenta la probabilità complementare del primo evento pari a 91,4%.
I totali marginali di riga indicano la probabilità di essere maschio pari al 53,1% e la probabilità di essere femmina pari al 46,9%.
Nella tabella abbiamo tutte le probabilità che ci consentono di calcolare le probabilità condizionate. In particolare:
Probabilità condizionata che un maschio sia daltonico, incidenza del daltonismo per i maschi

$$P(D/M)=\frac{P(D\cap M)}{P(M)}=\frac{8,1\%}{53,1\%}=15,3\%$$

Probabilità condizionata che una femmina sia daltonica, incidenza del daltonismo per le femmine

$$P(D/F)=\frac{P(D\cap F)}{P(F)}=\frac{0,5\%}{46,9\%}=1,1\%$$

Probabilità condizionata che un daltonico sia maschio, incidenza dei maschi per il daltonismo

$$P(M/D)=\frac{P(D\cap M)}{P(D)}=\frac{8,1\%}{8,6\%}=94,2\%$$

Probabilità condizionata che un daltonico sia femmina, incidenza delle femmine per il daltonismo

$$P(F/D)=\frac{P(D\cap F)}{P(D)}=\frac{0,5\%}{8,6\%}=5,8\%$$

63 Supponiamo che il verificarsi della sordità sia indipendente dal sesso. Indicare e calcolare le quattro probabilità mancanti nella seguente tabella:

	Sordo	Non sordo	Totale
Maschio			0,531
Femmina			0,469
Totale	0,004	0,996	1,000

Esempio

- *Un test diagnostico è qualsiasi procedimento che sappia individuare se un individuo è soggetto a una determinata malattia cioè malato M^+ o sano M^-.*

Un test può dare esito positivo (cioè indicare che l'individuo è malato) T^+ o negativo (indicare che un individuo è sano) T^-. Si sa però che le indicazioni dei più comuni test non sono del tutto sicure, può accadere che un individuo risultato positivo al test sia invece sano e viceversa. Quindi è necessario dare una valutazione delle caratteristiche di un test diagnostico.
Immaginiamo che un determinato test diagnostico sia sotto sperimentazione e che i risultati ottenuti siano indicati dalla seguente tabella

	Positivo=T^+	Negativo=T^-	Totale
Malato = M^+	4120	512	4632
Sano = M^-	1560	4322	5882
Totale	5680	4834	10514

Dato che la popolazione coinvolta è considerata significativa, possiamo passare alle frequenze relative e considerarle come una valutazione della probabilità.

	Positivo=T^+	Negativo=T^-	Totale
Malato = M^+	39,2%	4,9%	44,1%
Sano = M^-	14,8%	41,1%	55,9%
Totale	54,0%	46,0%	100%

In ogni cella leggiamo la probabilità dell'intersezione dei due caratteri, mentre nei totali marginali la probabilità di essere malato e sano (totali di riga) e la probabilità che il test sia risultato positivo o negativo (totali di colonna).

- $P(M^+ \cap T^+) = 39{,}2\,\%$ probabilità che il test sia vero positivo
- $P(M^+ \cap T^-) = 4{,}9\,\%$ probabilità che il test sia falso negativo
- $P(M^- \cap T^+) = 14{,}8\,\%$ probabilità che il test sia falso positivo
- $P(M^- \cap T^-) = 41{,}1\,\%$ probabilità che il test sia vero negativo
- $P(M^+) = 44{,}1\,\%$ probabilità di essere malato
- $P(M^-) = 55{,}9\,\%$ probabilità di essere sano
- $P(T^+) = 54{,}0\,\%$ probabilità che il test sia positivo
- $P(T^-) = 46{,}0\,\%$ probabilità che il test sia positivo

Questo è quello che ci dicono i dati grezzi della precedente tabella. Ma con alcuni semplici calcoli si possono calcolare le probabilità condizionate, che ci danno informazioni più rilevanti. In particolare:

- **Sensibilità del test** cioè la probabilità che un malato sia positivo
  $$P(T^+/M^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{M^+} = \frac{39{,}2\,\%}{44{,}1\,\%} = 88{,}9\,\%$$
- **Specificità del test** cioè la probabilità che un sano sia negativo
  $$P(T^-/M^-) = \frac{P(T^- \cap M^-)}{M^-} = \frac{41{,}1\,\%}{55{,}9\,\%} = 73{,}5\,\%$$
- **Valore predittivo del test** cioè la probabilità che un positivo sia malato
  $$P(M^+/T^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{T^+} = \frac{39{,}2\,\%}{54{,}0\,\%} = 72{,}6\,\%$$

64 Stimare la sensibilità, la specificità e il valore predittivo sulla base della seguente tabella:

	Positivo=T^+	Negativo=T^-
Malato=M^+	920	50
Sano=M^-	60	180

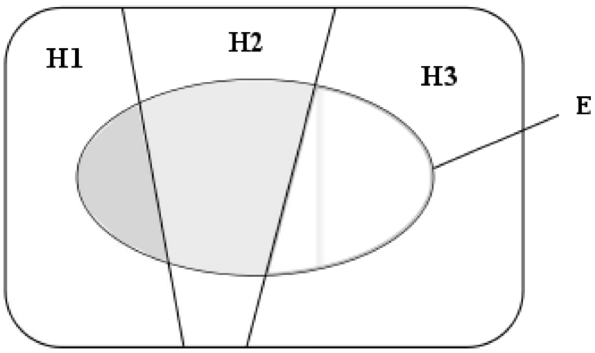
►8. Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes fornisce un metodo che consente di modificare l'opinione iniziale sul verificarsi di un evento (espressa sotto forma di probabilità a priori) sulla base delle informazioni fornite dall'esperienza che permettono di formulare nuove probabilità dette probabilità a posteriori.

Esempio

- *Supponiamo che un paziente vada a farsi visitare da un medico per la prima volta. Già prima di effettuare la visita il medico ha un'idea delle possibili malattie da cui potrebbe essere affetto: sa che molti dei suoi pazienti hanno disturbi di poco conto (evento H_1), alcuni hanno disturbi più gravi (evento H_2), altri ancora malattie rare (evento H_3). A questo punto il medico effettuerà la visita, sottoporrà il paziente ad una serie di analisi cliniche ed otterrà il quadro dei sintomi: potrà adesso formulare una diagnosi sul paziente.*

Vediamo che cosa rappresenta tutto ciò in termini di probabilità.
Indichiamo con H_1, H_2, H_3 le tre tipologie di malattia in ordine di rarità: sulla base delle informazioni che il medico sui propri pazienti può associare ad ognuno di questi eventi una probabilità a priori P(Hi).
In funzione della sintomatologia riscontrata (rappresentata dall'evento E) si possono determinare sulla base delle statistiche ufficiali a livello nazionale le probabilità condizionate P(E/Hi) che rappresentano le probabilità che si manifestino tali sintomi se un paziente è affetto da una delle tre tipologie di malattia.
Ciò che ci interessa è ricavare le probabilità a posteriori P(Hi/E), che rappresentano le probabilità che il paziente abbia contratto una delle tre malattie, sapendo che presenta i sintomi rappresentati da E. Su questa base si formulerà la diagnosi.
Si conoscono o si possono conoscere le seguenti probabilità:
probabilità sulla base dell'esperienza del medico $P(H_1)=0{,}65$; $P(H_2)=0{,}30$; $P(H_3)=0{,}05$;
probabilità dei sintomi evidenziati dal paziente condizionate alla gravità della malattia desunte dalle statistiche ufficiali: $P(E/H_1)=0{,}20$; $P(E/H_2)=0{,}60$; $P(E/H_3)=0{,}70$.
La situazione può essere rappresentata con un Diagramma di Venn:



Essendo H_1 , H_2 e H_3 eventi incompatibili ed esaustivi, l'evento E può essere visto come unione di tre eventi disgiunti: $E\cap H_1$, $E\cap H_2$ *e* $E\cap H_3$

Quindi $P(E)=P(E\cap H_1)+P(E\cap H_2)+P(E\cap H_3)$

$P(E\cap H_1)=P(E/H_1)\cdot P(H_1)$; $P(E\cap H_2)=P(E/H_2)\cdot P(H_2)$; $P(E\cap H_3)=P(E/H_3)\cdot P(H_3)$ da cui

$P(E)=P(E/H_1)\cdot P(H_1)+P(E/H_2)\cdot P(H_2)+P(E/H_3)\cdot P(H_3)$

Nell'esempio: $P(E)=0{,}65\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}05\cdot 0{,}7=0{,}345$

Quello che a noi interessa sono in realtà le probabilità che il paziente abbia una delle tre tipologie di malattia sapendo che manifesta i sintomi rappresentati dall'evento *E.*

$$P(H_i/E)=\frac{P\cap H_i}{P(E)}=\frac{P(E/H_i)\cdot P(H_i)}{P(E)} \text{ quindi}$$

$$P(H_1/E)=\frac{P(E/H_1)\cdot P(H_1)}{P(E)};\ P(H_2/E)=\frac{P(E/H_2)\cdot P(H_2)}{P(E)};\ P(H_3/E)=\frac{P(E/H_3)\cdot P(H_3)}{P(E)}$$

Queste probabilità sono dette **probabilità a posteriori**.

Nell'esempio $P(H_1/E)=\frac{0{,}65\cdot 0{,}2}{0{,}345}=0{,}38$; $P(H_2/E)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}345}=0{,}52$; $P(H_3/E)=\frac{0{,}05\cdot 0{,}7}{0{,}345}=0{,}1$

Si può osservare che la conoscenza dei sintomi modifica in questo caso la diagnosi, in quanto la malattia più probabile non risulta quella più comune, bensì quella intermedia.

TEOREMA DI BAYES. Se $H_1, H_2, \dots, H_n$ costituiscono un sistema di eventi incompatibili ed esaustivi ed E è un evento non impossibile, allora per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si ha la seguente uguaglianza:

$$P(H_i/E) = \frac{P(H_i) \cdot P(E/H_i)}{P(H_1) \cdot P(E/H_1) + P(H_2) \cdot P(E/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(E/H_n)} .$$

Il teorema di Bayes può quindi essere utilizzato ogni volta che abbiamo a che fare con un evento che può essere originato da *n* diverse cause tra loro incompatibili ed esaustive (o sul quale si possono formulare *n* ipotesi), delle quali si conosce la **probabilità a priori** e di cui si possono individuare, sulla base dell'esperienza, le probabilità $P(E/H_i)$ dette **probabilità probative** che ci permettono di modificare le nostre probabilità iniziali attraverso le **probabilità a posteriori** $P(H_i/E)$.

Esempio

- *Un sacchetto contiene 4 palline che possono essere bianche o nere. Effettuiamo 5 estrazioni, rimettendo sempre la pallina estratta nel sacchetto. Occorre stimare la composizione dell'urna, cioè di quante palline bianche e nere questa si compone.*

L'ipotesi di partenza senza conoscere la composizione dell'urna e senza aver effettuato alcun esperimento è che l'urna può contenere un numero di palline bianche compreso fra 0 e 4 e che ognuno di questi 5 eventi abbia la stessa probabilità, quindi $P(H_i) = \frac{1}{5}$ dove con H_i si indica l'ipotesi che l'urna contenga *i* palline bianche.
Procediamo all'estrazione, rimettendo ogni volta la pallina nel sacchetto, supponiamo che l'estrazione abbia dato il seguente risultato: 3 palline bianche e 2 nere, nel seguente ordine BBNBN.
Qual è la probabilità associata all'esperimento in ognuna delle cinque ipotesi formulate in precedenza?
Si tratta della probabilità dell'intersezione di 5 eventi indipendenti: una pallina bianca alla 1ª estrazione e alla 2ª , una pallina nera alla 3ª, una pallina bianca alla 4ª ed una nera alla 5ª, quindi si ottiene come prodotto delle probabilità dei singoli eventi enumerati.
Se l'urna contiene *i* palline bianche la probabilità dell'evento prodotto è la seguente:

Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_0= 0 palline bianche	$P(E/H_0) = \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-0}{4}\right) \cdot \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-0}{4}\right) = 0$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_1= 1pallina bianca	$P(E/H_1) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) = 0{,}0088$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_2= 2 palline bianche	$P(E/H_2) = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right) = 0{,}0312$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_3= 3 palline bianche	$P(E/H_3) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{4}\right) = 0{,}0264$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_4= 4 palline bianche	$P(E/H_4) = \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-4}{4}\right) = 0$

A questo punto possiamo calcolare la probabilità dell'esperimento come somma delle probabilità condizionate per la probabilità di ogni ipotesi a priori, otteniamo 0,20.

$$P(E) = P(E/H_0) \cdot P(H_0) + P(E/H_1) \cdot P(H_1) + P(E/H_2) \cdot P(H_2) + P(E/H_3) \cdot P(H_3) + P(E/H_4) \cdot P(H_4)$$

$$P(E) = 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}0088 \cdot 0{,}2 + 0{,}0312 \cdot 0{,}2 + 0{,}0264 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 = 0{,}0133 .$$

Ora, utilizzando il teorema di Bayes, si possono calcolare le probabilità a posteriori.

Probabilità ipotesi 0 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_0/E)=\frac{0\cdot 0,2}{0,0133}=0$

Probabilità ipotesi 1 pallina bianca subordinata all'esperimento $P(H_1/E)=\frac{0,0088\cdot 0,2}{0,0133}=0,1324$

Probabilità ipotesi 2 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_2/E)=\frac{0,0312\cdot 0,2}{0,0133}=0,4706$

Probabilità ipotesi 3 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_3/E)=\frac{0,0264\cdot 0,2}{0,0133}=0,3971$

Probabilità ipotesi 4 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_4/E)=\frac{0\cdot 0,2}{0,0133}=0$

Sulla base di questa esperienza risulta quindi che le due composizioni più probabili sono quella con 2 o 3 palline rosse.

65 Ripetiamo l'esperimento assumendo le probabilità ottenute come nuove probabilità a priori ed effettuando ancora 5 estrazioni dal sacchetto. Supponiamo che la sequenza ottenuta sia: NNNNN. Quali sono questa volta le probabilità subordinate all'esperimento?

$P(H_0/E)=0,723$; $P(H_1/E)=0,229$; $P(H_2/E)=0,045$; $P(H_3/E)=0,003$; $P(H_4/E)=0$

66 Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F^+). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M^+). Si completi la seguente tabella

	Malato=M^+	Sano=M^-	Totale
Fumatore=F^+	18,7%		22%
Non Fumatore=F^-			78%
Totale			100%

Determinare la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore

R. $P(F^+/M^+)=55\%$

67 Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60% e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

A) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?
B) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la meta, con quale probabilità appartiene al gruppo dei non allenati? R. $P(A)=0,85$; $P(B)=0,79$

68 Tra i villeggianti di una località di mare, il 75% trascorre le vacanze sempre nello stesso posto, il 25% solo saltuariamente. Il 60% dei villeggianti abitudinari possiede una casa e così il 10% dei villeggianti saltuari. Sapendo che un villeggiante scelto a caso possiede una casa, con che probabilità si tratta di un abitudinario? R. $P(A)=0,95$

69 Tre macchine, A B, C, producono rispettivamente il 60%, il 30%, e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.

A) Determinare la probabilità di estrarre un pezzo difettoso.
B) Se viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso, determinare la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina C. R. $P(A)=0,025$; $P(B)=0,16$

►9. Esercizi dalle prove Invalsi

70 Se si lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che escano una testa e una croce? (Prove Invalsi 2005)

71 Qual è la probabilità che su 6 lanci di un comune dado a 6 facce non truccato si abbia per 6 volte il numero 3? (Prove Invalsi 2005)

72 Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Sena reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari? (Prove Invalsi 2005)

73 Se lanci un dado una sola volta, quale probabilità hai di ottenere un numero pari minore di 6? (Prove Invalsi 2006)

74 E' lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che escca una faccia il cui numero è multiplo di 3? (Prove Invalsi 2006)

75 Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: "esce una figura o un asso"? (Prove Invalsi 2006)

76 Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu? (Prove Invalsi 2006)

77 La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è 3/50. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna? (Prove Invalsi 2006)

78 Si lancia un comune dado a 6 facce non truccato per 8 volte. Qual è la probabilità che al terzo lancio esca il numero 5? (Prove Invalsi 2005)

79 Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, quale delle seguenti affermazioni è falsa? La probabilità di estrarre una pallina...

A. rossa o gialla è 0,5
B. verde è 0,1
C. blu o gialla è 0,7
D. rossa o blu è 0,4

(Prove Invalsi 2005)

80 Se i lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che esca almeno una testa? (Prove Invalsi 2006)

81 Un'urna contiene 20 palline: 4 bianche, 6 rosse e 10 verdi. Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa e la probabilità di estrarre una pallina rossa o verde? (Prove Invalsi 2006)

82 La probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna è 4/10. Quale delle seguenti affermazioni è compatibile con la precedente?

A. L'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 nere.
B. L'urna contiene 40 palline bianche, 40 rosse e 40 nere.
C. L'urna contiene 40 palline bianche e 100 rosse.
D. l'urna contiene 80 palline bianche, 50 rosse e 70 nere.

(Prove Invalsi 2006)

83 In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5? (Prove Invalsi 2006)

84 Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna ed osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una 21-esima pallina, qual è la probabilità che questa si nera? (Prove Invalsi 2007)

85 Quanto vale la probabilità che una persona risponda correttamente ad una domanda che prevede solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte? (Prove Invalsi 2007)

86 Un'urna contiene 21 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento "esce la lettera π"? (Prove Invalsi 2007)

87 In una lotteria i 4 premi sono assegnati per estrazioni successive, partendo dal 1° fino al 4°. Pietro ha acquistato uno solo dei 100 biglietti venduti. Egli è presente all'estrazione dei premi e l'estrazione del 1° premio lo vede perdente. Qual è la probabilità che Pietro vinca il 2° premio? (Prove Invalsi 2007)

88 Si lanciano due dadi ed escono due numeri il cui prodotto è 6. Qual è la probabilità che uno dei due numeri usciti sia 2? (Prove Invalsi 2007)

89 Quanti casi possibili si ottengono gettando un dado e una moneta contemporaneamente?
A. 12 B. 8 C. 36 D. 2 E. La risposta esatta non è tra quelle proposte.
(Prove Invalsi)

90 Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3?
A. Maggiore di 61, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4.
B. 61, perché il dado non si ricorda degli eventi passati.
C. Minore di 61, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri.
D. 21, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro).
E. Le informazioni date non consentono di rispondere.
(Prove Invalsi 2003)

91 Estrarre da un mazzo di carte francesi (52 carte) una carta di seme nero e figura è…
A. più probabile che estrarre una carta di seme nero.
B. più probabile che estrarre una figura di qualunque seme.
C. meno probabile che estrarre una carta di seme nero e asso.
D. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme nero o figura.
E. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme rosso e figura.
(Prove Invalsi 2003)

92 La probabilità di estrarre un 6 o un 8 da un mazzo di carte napoletane (40 carte) è… (Prove Invalsi 2003)

93 Aldo e Luigi giocano a testa o croce, ciascuno di essi lancia due monete. Qual è la probabilità che il numero di teste di Luigi sia uguale a quelle ottenute da Aldo? (Prove Invalsi 2003)

94 Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità 1/2 di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa?
A. Maggiore di 1/2
B. Uguale a ½
C. Minore di ½
D. Le informazioni date non consentono di rispondere.
(Prove Invalsi 2004)

95 Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35? (Prove Invalsi 2004)

96 Qual è la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari o multiplo di 3? (Prove Invalsi 2004)